1 Rayon de convergence d'une série entière

1.1 Rayon de convergence et premières propriétés

Proposition 1.1.1 (Lemme d'Abel) *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière et* $z_0 \in \mathbb{C}^*$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée. Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$*, la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument.*

Définition 1.1.1 (Rayon de convergence) *On a les définitions suivantes équivalentes du rayon de convergence* R *d'une série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *:*

- $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ *la suite* $(a_n r^n)$ *soit bornée*$\}$.
- $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,$ *la série* $\sum a_n r^n$ *soit convergente (absolument)*$\}$.

Le rayon de convergence vaut $+\infty$ *si ces ensembles ne sont pas majorés.*

Proposition 1.1.2 (Rayon de convergence et caractère borné de $(a_n z^n)_n$**)** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*.*

1. - *Si* $|z| < R$*, alors la suite* $(a_n z^n)$ *est bornée.*
   - *Si* $|z| > R$*, alors la suite* $(a_n z^n)$ *n'est pas bornée.*
2. - *Si la suite* $(a_n z^n)$ *est bornée, alors* $|z| \leq R$*.*
   - *Si la suite* $(a_n z^n)$ *n'est pas bornée, alors* $|z| \geq R$*.*

Remarque 1.1.1 *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, alors* $R \geq 1$*.*

Proposition 1.1.3 (Convergence de la série $\sum a_n z^n$**)** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* R *son rayon de convergence.*

1. - *Pour* $|z| < R$*, la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument.*
   - *Pour* $|z| > R$*, la série* $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement.*
2. - *Si la série* $\sum a_n z^n$ *converge, alors* $|z| \leq R$*.*
   - *Si la série* $\sum a_n z^n$ *diverge, alors* $|z| \geq R$*.*

Proposition 1.1.4 (Comparaison de séries entières) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques, soit* R_a *et* R_b *les rayons de convergence de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *respectivement.*

Si $a_n = O_{+\infty}(b_n)$*, alors* $R_b \leq R_a$*.*
Si $a_n \sim_{+\infty} b_n$ *alors* $R_b = R_a$*.*

1.2 Fonctions développables en série entière

Définition 1.2.1 (Fonctions développables en série entière (DSE)) *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$*, avec* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$*. On dit que* f *est développable en série entière sur* $]-r, r[$ *(avec* $]-r, r[$ *inclus dans* I*), s'il existe une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *supérieur ou égal à* r *telle que :*

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dire que f *est DSE au voisinage de* 0 *signifie qu'il existe* $r > 0$ *tel que* f *soit DSE sur* $]-r, r[$*.*

Corollaire 1.2.1 (Unicité du DSE) *Toute fonction décomposable en série entière admet une unique décomposition.*

Soient $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llll} e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} & , R = +\infty & \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n & , R = 1 \\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , R = +\infty & \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} & , R = 1 \\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , R = +\infty & -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} & , R = 1 \\ \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , R = +\infty & (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n & , R = 1 \\ \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , R = +\infty & \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & , R = 1 \end{array}$$

1.3 Opérations sur les séries entières et rayon de convergence

1.3.1 Somme de deux séries entières

Proposition 1.3.1 (Somme de deux séries entières) *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence* R_a *et* R_b*. Alors la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ *a un rayon de convergence* R *tel que* $R \geq \min(R_a, R_b)$*. Lorsque* $R_a \neq R_b$*, alors* $R = \min(R_a, R_b)$*.*
Si on a z *dans* $\mathbb{C}$ *avec* $|z| < \min(R_a, R_b)$*, alors :* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.

Corollaire 1.3.1 (Somme de deux fonctions DSE) *Si* f *et* g *sont développables en série entière au voisinage de* 0*, alors* $f + g$ *l'est aussi.*

1.3.2 Produit de Cauchy

Proposition 1.3.2 (Produit de Cauchy) *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*. Alors la série entière produit de Cauchy* $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$*, avec :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *a un rayon de convergence* R *tel que :* $R \geq \min(R_a, R_n)$*. De plus :*

$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$.

Corollaire 1.3.2 (Produit de deux fonctions DSE) *Si* f *et* g *sont développables en série entière au voisinage de* 0*, alors* fg *l'est aussi.*

1.3.3 La série entière $\sum n a_n z^n$

Proposition 1.3.3 (La série entière $\sum n a_n z^n$) *Les séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum n a_n z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

2 Régularité de la somme

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R\}$ (appelé disque fermé).

2.1 Convergence normale

Proposition 2.1.1 (Convergence normale) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $\rho \in [0, R[$. La série de fonctions $z \mapsto \sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, \rho)$.*

Exemple 2.1.1 *On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Pour z dans $\mathbb{C}$, avec $|z| < R$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Soit r tel que : $0 < r < R$, alors :*
$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p r^p = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta.$

2.2 Continuité

Proposition 2.2.1 (Continuité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière et R le rayon de convergence de la série entière. Alors :*

1. *$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0, R)$.*
2. *$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $] - R, R[$.*

Théorème 2.2.1 (Théorème d'Abel radial) *Si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R dans $\mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.*

Exemple 2.2.1 *Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$. Montrer que S est continue sur $] - 1, 1]$.*

2.3 Dérivation

Proposition 2.3.1 (Dérivation) *Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière et R le rayon de convergence de la série entière. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - R, R[$, et on a :*

$$\forall x \in] - R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

De plus f et f' ont le même rayon de convergence.

Corollaire 2.3.1 (Dérivées supérieures d'une série entière) *Soit f la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - R, R[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*
$\forall x \in] - R, R[,\ f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} m(m-1)...(m-k+1) x^{m-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+k)(m+k-1) \dots (m+1) a_{m+k} x^m.$
et f et $f^{(k)}$ ont le même rayon de convergence R.

Corollaire 2.3.2 (Une fonction DSE est $\mathcal{C}^\infty$) *Toute fonction développable en série entière sur $] - R, R[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle et ses dérivées successives sont aussi DSE sur $] - R, R[$.*

Exemple 2.3.1 *$h : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

2.4 Série de Taylor d'une fonction développable en série entière

Proposition 2.4.1 (Expression du DSE) *Soit f une fonction admettant une décomposition en série entière sur $]-R,R[$ sous la forme $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.*

Ainsi : $\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

3 Méthodes

3.1 Comment déterminer un rayon de convergence ?

3.1.1 Règle de D'Alembert

En considérant la proposition 1.1.3, on peut utiliser la règle de d'Alembert pour voir quand la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Ceci est assez pratique lorsque dans a_n il y a des produits ou des puissances, qui se simplifient par quotient $\dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}$. Ensuite il faut trouver z tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} > 1$.

Exemple 3.1.1 *Donner le rayon de convergence de : $\displaystyle\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}} z^{2n+1}$.*

3.1.2 Comparaison avec des séries entières plus simples

En utilisant la proposition 1.1.4.

Exemple 3.1.2 *Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, avec $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.*

3.1.3 Utilisation d'inégalités grâce à la définition et aux propriétés de base

Utiliser les propositions 1.1.2, 1.1.3 et 1.1.4 afin d'obtenir deux inégalités pour les rayons de convergenece.

Exemple 3.1.3 *Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$, avec a_n la n-ème décimale de $\sqrt{2}$.*

3.2 Comment développer une fonction en série entière ?

3.2.1 Opérations

On peut utiliser les opérations de somme et produit de séries entières.

Exemple 3.2.1 *Développement en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, de : $x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$.*

3.2.2 Changement de variables

Reconnaître un DSE classique à l'aide d'un changement de variable.

Exemple 3.2.2 *Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$, avec $a \neq b$. Décomposer en série entière $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$, puis $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ en déterminant le domaine de validité.*

3.2.3 Dérivation/Intégration

Exemple 3.2.3 *DSE de* $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$.

Pour trouver le DSE de f, on peut déterminer le DSE de f', puis primitiver terme à terme en utilisant la méthode suivante :
soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x de $]-R, R[$, comme on a convergence normale et donc uniforme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur le segment $[0, x]$ (si $x > 0$) ou $[x, 0]$ (si $x < 0$), car il sont inclus dans $D(0, R)$, et que chaque terme de la série est continu sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$, alors on peut intégrer terme à terme : $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Exemple 3.2.4 *DSE de* Arctan *ou* Arcsin *.*

3.2.4 Équations différentielles

L'idée est de chercher une équation différentielle vérifiée par notre fonction et d'injecter $\sum a_n x^n$ dans notre équation en utilisant les formules de dérivation d'une série entière.

Exemple 3.2.5 *Soit* $f : x \mapsto e^{x^2/2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt$ *est solution de* $y' = xy + 1$*, puis DSE de* f*.*

3.2.5 Utilisation des formules de Taylor

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégrale : On passera souvent par l'utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange : $\forall x \in]-r, r[$, $\displaystyle\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}|$.

Exemple 3.2.6 *Décomposition en série entière de la fonction* exp.

3.3 Comment reconnaître un développement en série entière ?

3.3.1 Opérations

Exemple 3.3.1 *Rayon de convergence des séries entières suivantes et expression de la somme sur* $\mathbb{R}$*.*
$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

3.3.2 Changement de variables

Reconnaître un DSE classique à l'aide d'un changement de variable.
Exemple 3.3.2 *Déterminer le rayon de convergence de* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$*, puis exprimer* $S(x)$*.*

3.3.3 Dérivation/Intégration

Exemple 3.3.3 *Déterminer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on peut d'abord dériver et tomber sur $\displaystyle\sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$ qui est parfois plus facile à calculer, puis on primitive.

Exemple 3.3.4 *Décomposer* $\dfrac{1}{1+X^3}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$*.*
Calculer $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ *pour* x *dans un intervalle à préciser.*