1 Rappels de sup sur le dénombrement

1.1 Ensembles finis

Définition 1.1.1 (Ensembles finis et cardinal) *Soit E un ensemble non vide. E est dit **fini**, s'il existe un entier naturel n tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. On dit que n est le **cardinal** de E et on note $n = card(E)$ ou $n = |E|$ ou $n = \#E$.*
Si E est vide, on convient que E est fini et dans ce cas le cardinal de E est zéro.
Si E n'est pas fini, on dit que E est infini.

Proposition 1.1.1 (Applications et cardinal) *Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Alors on a*

1. *Si f est une injection de E dans F alors $card(E) \leq card(F)$.*
2. *Si f est une surjection de E dans F alors $card(E) \geq card(F)$.*
3. *Si f est une bijection de E dans F alors $card(E) = card(F)$.*
4. *Si $card(E) = card(F)$, alors toute injection de E dans F est bijective.*
5. *Si $card(E) = card(F)$, alors toute surjection de E dans F est bijective.*

Proposition 1.1.2 (Inclusion d'ensemble et cardinal) *Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et on a $card(A) \leq card(E)$.*
De plus on a $A = E$ si et seulement si $card(A) = card(E)$

Proposition 1.1.3 (Opérations sur les ensembles finis) *E et F désignent des ensembles finis.*

1. *Si A est inclus dans E, alors : $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$, avec $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.*
2. *$card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$;*
3. *$card(E \cup F) = card(E) + card(F)$ si E et F sont disjoints ;*
4. *$card(E \times F) = card(E) \times card(F)$;*
5. *$card(\mathcal{F}(E, F)) = card(F)^{card(E)}$, où $\mathcal{F}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications allant de E dans F.*
6. *$card(\mathcal{P}(E)) = 2^{card(E)}$, où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.*

1.2 Dénombrement

1.2.1 Parties d'un ensemble

Proposition 1.2.1 (Nombre de parties de E) *On a : $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.*

1.2.2 p-listes

Définition 1.2.1 (p-listes) *Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **p-liste de** E tout p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E^p.*

Proposition 1.2.2 (Nombre de p-listes) *Le nombre de p-liste est n^p.*

Remarque 1.2.1 *Le nombre de p-liste $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E^p avec les x_i deux à deux distincts est $n(n-1)...(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.*

1.2.3 Permutations

Définition 1.2.2 (Permutations) *On appelle* ***permutation de*** E *toute bijection de* E *dans* E.

Proposition 1.2.3 (Nombre de permutations) *Le nombre de permutations de* E *est égal à* $n!$

1.2.4 Combinaisons

Définition 1.2.3 (Combinaison) *On appelle* ***combinaison de*** p ***éléments de*** E *toute partie de* E *comportant* p *éléments. Le nombre de combinaisons de* p *éléments de* E *est noté* $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Proposition 1.2.4 (Formulaire avec les coefficients binomiaux) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Pour* $p \in [\![0, n]\!]$, *on a* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. *Pour* $p \in [\![1, n-1]\!]$, *on a :* $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.
3. *Pour* $p \in [\![1, n]\!]$, *on a :* $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Exemple 1.2.1 (Formule de Vandermonde) *Soient* a *et* b *deux entiers naturels et* n *dans* $[\![1, a+b]\!]$. *Montrer par deux méthodes différentes que :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

1.3 Ensembles dénombrables

Définition 1.3.1 (Ensembles dénombrables) *Un ensemble infini* E *est dit dénombrable s'il existe une bijection de* E *sur* $\mathbb{N}$.

Exemple 1.3.1 $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont dénombrables, mais* $\mathbb{R}$ *ne l'est pas.*

Corollaire 1.3.1 (CNS pour qu'un ensemble soit fini ou dénombrable) *Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de* $\mathbb{N}$.

Proposition 1.3.1 (Dénombrabilité et opérations ensemblistes)

1. *Soient* $E_1, ..., E_p$ *des ensembles dénombrables. Alors* $E_1 \times ... \times E_p$ *est dénombrable.*
2. *Soit* E *un ensemble. Soient* I *un ensemble fini ou dénombrable et* $(E_i)_{i\in\ I}$ *une famille de sous-ensembles de* E *qui sont finis ou dénombrables. Alors* $\displaystyle\bigcup_{i\in I} E_i$ *est fini ou dénombrable.*

Proposition 1.3.2 (Support d'une famille sommable) *Soit* I *un ensemble et* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\mathbb{C}$ *sommable. Alors* $\{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ *est au plus dénombrable.*

2 Lien entre vocabulaire ensembliste et probabiliste

Définition 2.0.1 (Issues) *L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations ou des observables) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Il est souvent noté* Ω.

Définition 2.0.2 (Événements) *Un événement est un ensemble d'issues ; c'est une partie de* Ω. *On appelle événement élémentaire, un événement constitué d'une seule issue (c'est-à-dire un singleton).*

Définition 2.0.3 (Événements certains, impossibles, incompatibles)

1. *L'événement* $\emptyset$ *est appelé événement impossible. Il ne peut être réalisé quelle que soit l'issue de l'épreuve.*
2. *L'événement* Ω *est appelé événement certain. Il est toujours réalisé*

3. *Si $A \cap B$ est l'événement impossible (c'est-à -dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont incompatibles.*

Définition 2.0.4 (Système complet d'événements) *Un système complet d'événements est une partition de Ω, c'est-à-dire :*
le système $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événement si et seulement si

- *Si aucun des A_i est impossible : $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$.*
- *ils sont incompatibles deux à deux : $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \emptyset$.*
- *Ω est la réunion des A_i : $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ c'est-à -dire : $\forall x \in \Omega,\ \exists i \in I, x \in A_i$.*

  Autrement dit on a : $\forall x \in \Omega, \exists! i \in I,\ x \in A_i$.

Exemple 2.0.1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans points fixes. On pose $D_0 = 1$. Montrer que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$.*

3 Espaces probabilisés

Soit Ω un ensemble.

3.1 Tribu

Définition 3.1.1 (Tribu) *On appelle tribu sur Ω une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*

- *$\Omega \in \mathcal{T}$.*
- *Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.*
- *Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, l'union $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient encore à $\mathcal{T}$.*

Dans ce cas, on dit que le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est probabilisable.

3.2 Probabilité

Définition 3.2.1 (Probabilité) *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ la donnée d'une application $P : \mathcal{T} \to [0; 1]$ telle que*

- *$P(\Omega) = 1$*
- ***(Additivité dénombrable)** Pour tout suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements incompatibles de $\mathcal{T}$, on a :*
  $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Remarque 3.2.1 *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.*

Proposition 3.2.1 (Opérations et probabilités) *Soient A et B deux événements de $\mathcal{T}$.*

1. *$P(\emptyset) = 0$;*
2. *Si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;*
3. *$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$;*
4. *Si on a : $A \subset B$, alors on a : $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$;*
5. *$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$; ;*
6. *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*
7. *Soient $A_1, ..., A_n$ des événements deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$, alors : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.*

Remarque 3.2.2 *Une somme de probabilité provient en général d'une probabilité d'une union disjointe.*

Définition 3.2.2 (Événement négligeable, presque sûr) *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{T}$.*

1. *Si $P(B) = 0$, alors B est un événement négligeable.*
2. *Si $P(B) = 1$, alors B est un événement presque sûr.*
3. *Toute propriété vérifiée sur un ensemble de probabilité un est dite presque sûre.*

Exemple 3.2.1 *Anne et Bob lancent à tour de rôle le même dé cubique parfait. Anne joue la première. Le vainqueur est le premier qui obtient 6. On considère les événements A : « Anne gagne la partie », B : « Bob gagne la partie » et, pour tout n entier naturel non nul S_n : « obtenir 6 au n-ème lancer » et F_n : « la partie se termine au n-ème lancer ». Déterminer les probabilités de A et B. et montrer que le jeu se termine presque sûrement.*

3.3 Révision de sup : quelques probabilités dans un univers fini

Définition 3.3.1 (Probabilité uniforme) *Dans le cas où Ω est fini de cardinal n, on définit la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par : $\forall \omega \in \Omega, \quad P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}$.*
Pour tout événement A, on a alors $P(A) = \dfrac{card(A)}{n}$.

Exemple 3.3.1 *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages sans remise. Quelle est la probabilité de tirer les numéros dans l'ordre strictement croissant ?*

Proposition 3.3.1 (Binomiale) *On considère une succession de n expériences identiques et indépendantes à deux issues : succès et échec, et pour chacune d'entre elles, la probabilité d'un succès est p. Alors la probabilité d'avoir k succès est $p_k = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.*

3.4 Réunions et intersections dénombrables d'événements

Proposition 3.4.1 (Continuité croissante) *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements croissante, c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $A_n \subset A_{n+1}$.*

Alors $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Corollaire 3.4.1 (Continuité décroissante) *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements décroissante, c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $A_{n+1} \subset A_n$*
Alors $P\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Proposition 3.4.2 (Sous-additivité) *Étant donnée $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événement, on a :*
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Exemple 3.4.1 *(Borel Cantelli 1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ converge. Pour tout entier naturel m, on pose $C_m = \displaystyle\bigcup_{i\geq m} A_i$. Montrer que $P\left(\displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m\right) = 0$, puis interpréter ce résultat.*

4 Conditionnement et indépendance

4.1 Probabilités conditionnelles

Définition 4.1.1 *Étant donné* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé et* $B \in \mathcal{T}$ *un événement de probabilité non nulle, la probabilité conditionnnelle d'un événement* A *sachant* B *est donnée par*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Elle se note également $P(A|B)$*.*

Proposition 4.1.1 P_B *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{T})$*.*

Proposition 4.1.2 (Formule des probabilités composées) *Si* $P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$*, alors*

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \dots P(A_n|(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})).$$

Exemple 4.1.1 *Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages avec remise et lorsqu'une boule rouge est tirée, on rajoute dans l'urne deux boules rouges. On note* R_n *l'événement : « au* n*-ème tirage, on a obtenu une boule rouge. ». Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Quelle est la probabilité de tirer que des boules rouges lors des* n *premiers tirages ?*

4.2 Probabilités totales

Proposition 4.2.1 (Probabilités totales) *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un système complet d'événements et* B *un événement.*
La série $\sum P(B \cap A_n)$ *converge et sa somme vaut* $P(B)$*. On a donc*

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P(B|A_n).$$

avec la convention $P(A_n)P(B|A_n) = 0$ *lorsque* $P(A_n) = 0$*.*

Exemple 4.2.1 *On se donne* $N+1$ *urnes numérotées de 0 à* N*. L'urne de numéro* k *contient* k *boules blanches et* $N+1-k$ *boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise. Quelle est la probabilité que la* $(n+1)$*-ième boule tirées soit blanche sachant que les* n *précédentes l'étaient toutes ?*

4.3 Formule de Bayes

Proposition 4.3.1 (Formule de Bayes) *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé. Soit* B *un événement de probabilité non nulle. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un système complet d'événements. Alors :*

$$\forall i \in \mathbb{N},\ P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}.$$

Exemple 4.3.1 *On considère* 100 *dés, dont* 25 *sont pipés au sens où la probabilité d'obtenir* 6 *est* $\frac{1}{2}$*. On lance un dé choisi au hasard et on obtient* 6*. Quelle est la probabilité que le dé lancé soit pipé ?*

4.4 Indépendance

Définition 4.4.1 (Indépendance de deux événements) *Deux événements A et B de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont dits indépendants si*
$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Remarque 4.4.1 *ATTENTION : ne pas confondre l'indépendance de A et B (qui est une notion probabiliste $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$) et l'incompatibilité de A et B (qui est une notion ensembliste $A \cap B = \emptyset$). L'indépendance dépend de la probabilité dont est muni Ω.*

Proposition 4.4.1 *Soient A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- *A et B sont indépendants,*
- *A et $\bar{B}$ sont indépendants,*
- *$\bar{A}$ et B sont indépendants,*
- *$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.*

Proposition 4.4.2 (Indépendance et probabilité conditionnelle) *Soient A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On suppose $P(B) > 0$. Alors les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.*

Définition 4.4.2 (Indépendance mutuelle) *Les événements d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont dit mutuellement indépendants si pour toute partie finie J de I, on a :*

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remarque 4.4.2 *Attention, l'indépendance deux à deux des événements n'implique pas l'indépendance mutuelle de la famille.*

Énonçons certains points intuitifs que l'on pourra utiliser sans les démontrer :

Exemple 4.4.1 *On lance m dés non pipés, puis on laisse de côté ceux qui donnent 6. On relance les autres, en laissant à nouveau de côté ceux qui donnent 6, etc.*

1. *On fixe un dé. A_n l'événement « le dé est lancé au moins n fois ». Calculer $P(A_n)$.*
2. *Soit B_n l'événement « on obtient m six en au plus n lancers ». Calculer $P(B_n)$.*

Remarque 4.4.3 *Un produit de probabilités provient souvent de la succession d'épreuves. Si celles-ci sont indépendantes, on utilise directement le produit des probabilités, mais si les expériences évoluent au cours du temps en fonction des autres, on utilise les probabilités composées.*