

Dans ce chapitre, (Ω, \mathcal{A}, P) désigne un espace probabilisé.

1 Définitions

1.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 1.1.1 (Variable aléatoire discrète) 1. On appelle variable aléatoire discrète sur Ω à valeurs dans E (un ensemble) toute application X de Ω dans E telle que :

- L'image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (fini ou dénombrable).
 - Pour tout x de $X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ appartient à la tribu \mathcal{A} .
2. Pour toute partie A de E , l'événement $X^{-1}(A)$ est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$. Dans le cas où A est un singleton $\{x\}$, on emploie plutôt les notations $\{X = x\}$ ou $(X = x)$.
 3. Dans la plupart des situations, E est un sous-ensemble de \mathbb{R} et on dit dans ce cas que X est une variable aléatoire réelle. Dans ce cas, si $A =]-\infty, x]$ pour un certain x de \mathbb{R} , on emploie plutôt les notations $\{X \leq x\}$ ou $(X \leq x)$. Pour les autres intervalles, nous avons le même type de notations.
 4. Si $E = \mathbb{R}^n$, alors $X = (X_1, \dots, X_n)$ est appelé vecteur aléatoire. Pour i dans $[[1, n]]$, les X_i sont des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles

Remarque 1.1.1 1. Une variable aléatoire est donc une application (et pas une variable) et elle n'est pas aléatoire !!

2. Ainsi $X(\Omega)$ peut s'écrire $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ si $X(\Omega)$ est fini ou $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ si $X(\Omega)$ est dénombrable.
3. IMPORTANT $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω .

Proposition 1.1.1 (Image réciproque d'un ensemble) Soit $U \subset X(\Omega)$. Alors $X^{-1}(U)$ est aussi un événement.

Démonstration :

Proposition 1.1.2 (Variable aléatoire $f(X)$) Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète et $f : E \rightarrow E'$ une application. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire que l'on note $f(X)$.

Démonstration : Nous avons $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega)) = \{f(x_n), n \in I\}$, si on note $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$, avec I un ensemble fini ou $I = \mathbb{N}$. Ainsi $f(X)(\Omega)$ est au plus dénombrable. Soit $x' \in f(X)(\Omega)$. Nous avons : $f(X)^{-1}(\{x'\}) = \{\omega \in \Omega, f(X(\omega)) = x'\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in f^{-1}(\{x'\})\} = X^{-1}(f^{-1}(\{x'\}) \cap X(\Omega))$ qui est dans \mathcal{A} grâce à la proposition précédente, car X est une variable aléatoire discrète.

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.2.1 (Loi de probabilité de X) Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète. On pose :

$$P_X : \begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto P(X = x) \end{cases} .$$

On a aussi : $\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P(X \in A) =$

On pose : $\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X(A) = P(X \in A)$.

P_X est appelée loi de probabilité de X .

Proposition 1.2.1 (Loi de probabilité définit une probabilité) L'application

$$P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \rightarrow [0, 1] \\ A & \mapsto P(X \in A) \end{cases} \text{ définit une probabilité sur } (X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))).$$

Démonstration : La tribu que l'on considère sur $X(\Omega)$ est $\mathcal{P}(X(\Omega))$, car $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

- P_X est à valeurs dans $[0, 1]$, car P est à valeurs dans $[0, 1]$.
- $P_X(X(\Omega)) = P(X \in X(\Omega)) = 1$, car $(X \in X(\Omega))$ est toujours réalisé.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux disjoints de $X(\Omega)$, on a :

$$P_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A_n\}\right). \text{ Comme les } A_n \text{ sont}$$

deux à deux disjoints, alors la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A_n\}$ l'est aussi et donc :

$$P_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \in A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_X(A_n).$$

Remarque 1.2.1 1. Donner la loi d'une variable aléatoire, c'est donner $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$ (espace de départ de P_X) puis les $P(X = x_i)$ pour tout i de \mathbb{N} (les valeurs de $P_X(x_i)$).

2. On a : $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$, car $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements.

3. Une variable aléatoire permet de transporter la probabilité P définie sur Ω vers une probabilité sur les valeurs de X . On s'intéresse plus qu'aux valeurs de X et on raisonne sur un espace probabilisé plus restreint $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X)$, mais qui nous donne juste l'information dont on a besoin. Ainsi lorsque l'on étudie une variable aléatoire, on ne s'intéresse pas vraiment à l'espace probabilisé de départ (Ω, \mathcal{A}, P) .

4. Ainsi lorsqu'une expérience modélise une succession infinie d'expériences succès-échecs indépendantes, nous avons eu des difficultés pour définir un espace probabilisé adéquat. Mais si on s'intéresse par exemple à la variable aléatoire X donnant le moment du premier succès, qui est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on déplace la difficulté sur $X(\Omega)$ qui est dénombrable et il est plus simple de définir un espace probabilisé sur $X(\Omega)$.

En effet $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ est bien dénombrable, via la bijection $\begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ n & \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ +\infty & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{cases} .$

Ainsi on déplace le problème sur un espace de taille plus petite contenant seulement l'information dont on a besoin, ce qui permet de s'affranchir de la difficulté théorique posée par l'espace de toutes les expériences infinies succès-échecs.

5. Il est parfois utile d'étendre le domaine de la loi de probabilité à un ensemble contenant strictement $X(\Omega)$, en convenant que $P(X = x) = 0$ si x n'est pas dans $X(\Omega)$.

Mais attention, si réciproquement, on a $P(X = x) = 0$, cela ne veut pas nécessairement dire que la valeur x n'est pas atteinte par X . Cela signifie que l'événement $(X = x)$ est quasi impossible.

Définition 1.2.2 (Variables aléatoires de même loi) On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y ont même loi si $P_X = P_Y$. On note alors $X \sim Y$.

Remarque 1.2.2

1. *ATTENTION* : deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi sans être égales. Par exemple on lance une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si on tombe sur pile et 0 si on tombe sur face. On pose $Y = 1 - X$. Alors X et Y ont la même loi sans être égales.

En effet Y vaut 1 si on tombe sur face et 0 si on tombe sur pile. Ainsi

$P(Y = 0) = P(X = 0) = 1/2$ (autant de chances d'avoir pile ou face) et

$P(Y = 1) = P(X = 1) = 1/2$.

2. X_1, \dots, X_n, \dots sont dites identiquement distribuées si elles ont toutes la même loi.
3. Si $X \sim Y$, alors X et Y ne sont pas forcément définis sur le même espace probabilisé.

Exemple 1.2.1 1. $X : \Omega \rightarrow \{c\}$ est une variable aléatoire constante. Une variable aléatoire X est quasi constante ou certaine s'il existe $x_0 \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x_0) = 1$, ce qui signifie que : $\forall x \in X(\Omega) \setminus \{x_0\}, P(X = x) = 0$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(X \leq x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \leq x)$.

3. **(CCP 100)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

(a) Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

(b) Calculer λ .

4. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et m boules noires numérotées de 1 à m . On tire une à une et sans remise toutes les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de la première boule blanche et Y la

variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de la première boule numérotée 1.

(a) (**CCP 109, adapter avec $m = 2$**) Déterminer la loi de X .

(b) (**CCP 109, adapter avec $m = 2$**) Déterminer la loi de Y .

(c) En déduire que pour p, q dans \mathbb{N}^* , avec : $p \leq q$, on a :
$$\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

5. On effectue une série de lancers d'une pièce, avec une probabilité p d'avoir Pile. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires afin d'obtenir exactement r Pile, avec $r \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X . On dit que X suit une loi binomiale négative.
6. Un joueur prélève n boules successivement avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On considère les variables aléatoires réelles Y et Z égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des n boules prélevées. Donner les lois de Y et Z .

Proposition 1.2.2 (Loi de $f(X)$) Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une application définie sur $X(\Omega)$. La loi de $f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in f(X)(\Omega), P(f(X) = y) =$$

Démonstration : Soit $y \in f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$. On a : $(f(X) = y) = \{\omega \in \Omega, f(X(\omega)) = y\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\} = (X \in f^{-1}(\{y\})) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} (X = x)$. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est au plus

dénombrable, car c'est une partie de $X(\Omega)$ qui est dénombrable. Ainsi $\bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} (X = x)$ est une union au plus dénombrable et disjointe.

Proposition 1.2.3 ($X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de même loi, définies sur respectivement $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$.

Soit f une application définie sur $X(\Omega_1) = Y(\Omega_2)$. Alors on a $f(X) \sim f(Y)$.

Démonstration : Tout d'abord, on a bien : $f(X)(\Omega_1) = f(Y)(\Omega_2)$, car $X(\Omega_1) = Y(\Omega_2) = Z$.

Soit $z \in Z$. Grâce à démonstration de la proposition précédente,

$$(f(X) = z) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{z\})} (X = x) \text{ et } (f(Y) = z) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{z\})} (Y = x). \text{ Les unions précédentes étant}$$

disjointes, alors $P(f(X) = z) = \sum_{x \in f^{-1}(\{z\})} P(X = x) = \sum_{x \in f^{-1}(\{z\})} P(Y = x) = P(f(Y) = z)$, car X et Y ont la même loi.

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

Définition 2.1.1 (Loi uniforme) Soient X une variable aléatoire et E un ensemble fini. On dit que X suit la loi uniforme sur E , si :

$$\forall e \in E, P(X = e) = \frac{1}{|E|}.$$

Dans ce cas pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a : $P(X \in A) =$
On note $\mathcal{U}(E)$ cette loi et on écrit $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Cette situation se rencontre lorsque l'on effectue des tirages équiprobables sur un espace fini, ce qui est souvent le cas lorsque l'on effectue un tirage au hasard.

Exemple 2.1.1 On répète le lancer d'un dé (que l'on suppose équilibré) à 12 faces jusqu'à ce que le dé produise un résultat pair que l'on divise finalement par 2. La variable aléatoire X prend la valeur obtenue. Quelle est la loi de X ?

2.2 Loi de Bernoulli

Définition 2.2.1 (Loi de Bernoulli) Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si

On note $\mathcal{B}(p)$ cette loi et on écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

La loi de Bernoulli modélise toute expérience à deux issues que l'on appelle succès ou échec. X vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Exemple 2.2.1 1. Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ un événement de probabilité p .

$$\text{Alors } 1_A : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \{0; 1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{cases} \text{ est une variable aléatoire discrète,}$$

car $1_A(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini et $1_A^{-1}(\{1\}) = A$ et $1_A^{-1}(\{0\}) = \bar{A}$ sont dans \mathcal{A} .

De plus $1_A \sim$

Ainsi une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli modélise toute expérience où un événement A se produit avec une probabilité p et ne se produit pas avec une probabilité $1 - p$.

2. Soient A_1, \dots, A_n des événements de Ω . Que représente la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n 1_{A_k}$?

3. Un ascenseur amène m personnes à n étages, chaque personne s'arrêtant à un étage de façon indépendante et équiprobable. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur ne s'est pas arrêté à l'étage i et 0 sinon. Quelle est la loi de X_i ?

2.3 Loi Binomiale

Définition 2.3.1 (Loi Binomiale) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) si

On note $\mathcal{B}(n, p)$ cette loi et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Une expérience peut se modéliser avec une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ lorsque l'on effectue n expériences aléatoires indépendantes à deux issues : succès et échec avec une probabilité p d'avoir un succès et donc une probabilité $1 - p$ d'avoir un échec. Dans ce cas la variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de ces n expériences.

Remarque 2.3.1 Si on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $n - X \hookrightarrow$

Exemple 2.3.1 1. (**CCP 95**) Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. On effectue cinq tirages successifs avec remise. Chaque boule blanche tirée rapporte 2 points et chaque boule noire tirée fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points gagnés. Déterminer les lois de X et Y .

2. Une puce se déplace sur un axe gradué. Elle part de 0. À chaque étape, elle se déplace d'une unité à gauche ou à droite de façon équiprobable. Chaque déplacement est indépendant des autres. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si lors de la n -ème étape la puce s'est déplacée à droite et -1 sinon. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Que représente S_n ? Exprimer S_n à l'aide d'une variable aléatoire Y_n suivant une loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

(b) À l'étape n , quelle est la probabilité d'être en 0 ? À une abscisse strictement positive ?

2.4 Loi géométrique

Soit $p \in]0; 1]$. Dans ce paragraphe, on posera $q = 1 - p$.

Définition 2.4.1 (Loi géométrique) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $p \in]0; 1]$. On appelle variable aléatoire géométrique de paramètre p une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$, et l'on dit que X suit une loi géométrique de paramètre p .

Remarque 2.4.1 On a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - p)^{k-1} =$

Exemple 2.4.1 (CCP 102) Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, P(X > n) =$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \leq n) =$

Proposition 2.4.1 (Interprétation d'une loi géométrique) On considère une succession infinie d'expériences mutuellement indépendantes succès-échec où la probabilité d'un succès pour chacune des expériences est p (épreuves de Bernoulli de paramètre p). Soit X donnant le rang du premier succès. Alors X suit une loi

Démonstration : Il s'agit d'une loi binomiale négative pour $m = 1$ (revoir l'exemple 1.2.1).

Remarque 2.4.2 1. En reprenant les notations précédentes, on a $P(X = +\infty) =$
En effet :

2. Ceci permet de simuler par exemple un jeu de pile ou face où l'on se demande au bout de combien de lancers on va obtenir pile pour la première fois.

Exemple 2.4.2 1. On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :

- si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;

- si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X > n) > 0$. Montrer que X suit une loi géométrique si et seulement si : $\forall n, k \in \mathbb{N}, P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$.

2.5 Loi de Poisson

Définition 2.5.1 (Loi de Poisson) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisable et $\lambda > 0$.

On appelle variable aléatoire de Poisson de paramètre λ une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque 2.5.1 On a bien : $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = 1$.

Exemple 2.5.1 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et on pose $Y = X^2 + 1$.

(a) Quelle est la probabilité que : $2X < Y$?

(b) Comparer les probabilités que X soit paire et que X soit impaire.

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout n de \mathbb{N} , on ait : $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, avec : $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Remarque 2.5.2 Nous remarquons que lorsque n tend vers $+\infty$, alors p_n tend vers 0.

Ainsi une loi de Poisson modélise un nombre d'apparitions d'un événement rare (p_n est petit) dans une suite très grande (n grande) d'événements. Dans les occurrences d'un événement rare, on peut remplacer la variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$ qui modélise le nombre d'événements rares réalisés au cours de n expériences par une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(np_n)$.

Ceci a l'avantage de simplifier les calculs et permet de travailler que sur un paramètre au lieu de deux pour la loi binomiale. Par ailleurs comme nous le verrons plus tard, ces deux variables aléatoires ont la même espérance. Ainsi, par ce remplacement, on ne change pas le nombre moyen d'apparition de ces événements rares.

Les lois de Poisson se rencontrent concrètement pour modéliser le nombre d'événements d'un certain type qui se produisent dans une période de temps donnée. Ce nombre peut être le nombre de clients se présentant dans un magasin, le nombre d'objets défectueux d'une chaîne de production, le nombre d'atomes radioactifs désintégrés dans un laps de temps donné,...

3 Couples de variables aléatoires

3.1 Définitions et loi d'un couple de variables aléatoires

Définition 3.1.1 (Couple de variables aléatoires) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soient deux variables aléatoires discrètes $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$. On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) comme la variable aléatoire

$$(X, Y) : \begin{cases} \Omega & \rightarrow E \times F \\ \omega & \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases} .$$

(X, Y) est UNE variable aléatoire.

Proposition 3.1.1 (La variable aléatoire (X, Y))

1. (X, Y) est encore une variable aléatoire discrète.
2. Toute variable aléatoire discrète définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeur dans $E \times F$ peut s'écrire sous la forme (X, Y) , où X et Y sont des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans E et F .

Démonstration :

1. Si on note $Z = (X, Y)$, nous avons : $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Or $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont dénombrables, alors $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ l'est aussi. Ainsi $Z(\Omega)$ est dénombrable en tant que sous-ensemble d'un ensemble dénombrable.
Par ailleurs, soit $z = (x, y) \in Z(\Omega)$. Ainsi $(Z = z) = (X = x) \cap (Y = y)$, qui est encore dans \mathcal{A} , car $(X = x)$ et $(Y = y)$ le sont aussi, car X et Y sont des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .
2. .

Définition 3.1.2 (Loi d'un couple de variables aléatoires et lois marginales)

1. La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y) , noté $P_{(X, Y)}$.
Ainsi la loi du couple est la donnée, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, des probabilités $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y)$.
2. Les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y . P_X est appelée première loi marginale et P_Y est appelée deuxième loi marginale.

Exemple 3.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p et q deux réels de l'intervalle $]0, 1[$ avec $p+q < 1$. On jette n fois un dé pipé dont les six faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3 et on suppose les lancers indépendants. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p , celle d'obtenir 2 est q et celle d'obtenir 3 est $r = 1 - p - q$. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (respectivement de 2) obtenus en n lancers.

1. Quelles sont les lois de X et de Y ?
2. Quelle est la loi de (X, Y) ?

Proposition 3.1.2 (Lois marginales) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Nous disposons de la loi conjointe de X et Y ($P(\{(X = x) \cap (Y = y)\})$ pour (x, y) dans $X(\omega) \times Y(\Omega)$). Alors pour tout x de $X(\Omega)$ et y de $Y(\Omega)$, on a les lois marginales :

$$P(X = x) = P_X(x) =$$

$$P(Y = y) = P_Y(y) =$$

Dans le cas où $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_j, \dots\}$ et $p_{ij} = P(\{(X = x_i) \cap (Y = y_j)\})$ pour (i, j) dans \mathbb{N}^2 , on récapitule la loi de (X, Y) dans le tableau suivant dont la somme de la i -ème ligne donne : et la somme de la j -ème colonne donne :

	Y				
X \	y ₁	y ₂	⋯	y _j	⋯
x ₁	p ₁₁	p ₁₂	⋯	p _{1j}	⋯
x ₂	p ₂₁	p ₂₂	⋯	p _{2j}	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x _i	p _{i1}	p _{i2}	⋯	p _{ij}	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Démonstration : Identique à la démonstration de sup.

Exemple 3.1.2 1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} telles que :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec } p \in]0, 1[.$$

(a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$. Donner le rayon de convergence de f et calculer $f(x)$ lorsque x est dans l'intervalle ouvert de convergence.

(b) **(CCP 111)** Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité pour le couple (X, Y) .

(c) **(CCP 111)** Déterminer la loi de Y .

(d) **(CCP 111)** Déterminer la loi de X .

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 , dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}.$$

(a) (**CCP 97**) Déterminer les lois marginales de X et Y .

(b) Quelle est la loi de $Z = X + Y$?

Remarque 3.1.1 *ATTENTION*, les lois marginales ne permettent pas d'obtenir la loi conjointe. Par exemple, on se donne une urne contenant 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules.

On envisage deux modes de tirages : avec et sans remise.

Dans ces deux cas on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si la première boule tirée est blanche et

0 si elle est noire et on note Y la deuxième boule tirée est blanche et 0 si elle est noire. Donner dans un tableau les lois conjointes et marginales correspondant aux deux situations. Constaté ensuite que les lois marginales dans les deux cas sont les mêmes mais pas les lois conjointes.

		Y		
		1	0	
Avec remise :	X	1	0	
	1	$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$	$P(X = 1) = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$
	0	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$	$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$	$P(X = 0) = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$
		$P(Y = 1) = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$	$P(Y = 0) = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$	

		Y		
		1	0	
Sans remise :	X	1	0	
	1	$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$	$P(X = 1) = \frac{3}{7}$
	0	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$P(X = 0) = \frac{4}{7}$
		$P(Y = 1) = \frac{3}{7}$	$P(Y = 0) = \frac{4}{7}$	

Pour calculer par exemple $P((X = 1) \cap (Y = 0))$, dans le cas sans remise, on a deux méthodes :

- Le nombre de tirages possibles est 7×6 (7 choix pour la première boule et 6 pour la deuxième). Le nombre de tirage avec une première boule blanche et une deuxième noire est 3×4 .
- $P((X = 1) \cap (Y = 0)) = P(X = 1)P(Y = 0|X = 1) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6}$.

Proposition 3.1.3 (n-uplet de variables aléatoires) 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}) , à valeurs dans des ensembles E_1, \dots, E_n . L'application

$$\begin{cases} \Omega & \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n \\ \omega & \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{cases} .$$

définit une variable aléatoire discrète, notée (X_1, \dots, X_n) . C'est la loi conjointe de X_1, \dots, X_n .

2. Réciproquement toute variable aléatoire discrète à valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_n$ est de la forme (X_1, \dots, X_n) , avec X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrète définies sur le même espace probabilisable. Elles sont appelés loi marginales de (X_1, \dots, X_n) .

Démonstration : Généraliser la preuve de la proposition 3.1.1.

Définition 3.1.3 (Loi conditionnelle) Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$ et X une variable aléatoire discrète définie sur Ω . La loi conditionnelle de X sachant A est la probabilité sur $X(\Omega)$ définie par

$$P_{X|A} : \begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto P_A(X = x) = \frac{P((X = x) \cap A)}{P(A)} \end{cases} .$$

C'est la loi de X si on munit Ω de la probabilité P_A .

Exemple 3.1.3 (CCP 98) Un employé d'un centre d'appels effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche (de façon indépendante des autres) avec une probabilité p . On note X le nombre de correspondants qui ont décroché.

1. Quelle est la loi de X ?
2. L'employé rappelle un peu plus tard les $n - X$ correspondants qui n'ont pas décrochés lors de sa première série d'appels. On note Y le nombre de ces correspondants qui décrochent cette fois. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer $P(Y = k|X = i)$ pour k dans \mathbb{N} .
3. On pose $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?

3.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 3.2.1 (Variables aléatoires indépendantes) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

On note cela $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Remarque 3.2.1 IMPORTANTE : soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . Alors pour tout n de \mathbb{N} , on a : $P(X + Y = n) =$

Exemple 3.2.1 1. (**CCP 97**) Les variables aléatoires X et Y de (**CCP 97**) de l'exemple 3.1.2 sont-elles indépendantes ?

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre respectifs λ_1 et λ_2 .

(a) (**CCP 103**) Déterminer la loi de $Z = X_1 + X_2$ (on donnera dans le paragraphe sur les fonctions génératrices une méthode plus rapide).

(b) Déterminer la loi de X_1 sachant $(Z = n)$.

3. Soient $p \in]0, 1[$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ et que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, avec pour tout m de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi $\mathcal{B}(m, p)$.

(a) (**CCP 103**) Déterminer la loi de X .

(b) Le nombre de clients venant dans un magasin pour acheter des poivrons suivent une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque client achète au hasard un poivron rouge ou vert. On note R le nombre de client choisissant un poivron rouge et V le nombre de clients choisissant un poivron vert.

i) Déterminer les lois de R et V .

ii) Sont-elles indépendantes ?

4. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$. Quelle est la probabilité pour que $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Proposition 3.2.1 (Événements et variables aléatoires indépendantes) Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ on a : $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Démonstration : On a $(X \in A) \cap (Y \in B) = \bigcup_{(x,y) \in A \times B} (X = x) \cap (Y = y)$ et cette réunion est disjointe

et elle est dénombrable, car $A \times B$ l'est en tant que sous-ensemble de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Ainsi, on a : $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = \sum_{(x,y) \in A \times B} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x)P(Y = y)$, car X et

Y sont indépendantes. Par ailleurs la famille $\sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x)P(Y = y)$ est sommable, car elle est

à termes positifs et sa somme est finie (elle vaut $P((X \in A) \cap (Y \in B))$). Ainsi :

$$\sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x)P(Y = y) = \sum_{x \in A} P(X = x) \sum_{y \in B} P(Y = y) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Définition 3.2.2 (n variables aléatoires indépendantes) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que les X_i sont indépendantes si pour tout (x_1, \dots, x_n) dans $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i = x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants.

Remarque 3.2.2 En pratique, il est rare qu'on utilise la définition précédente à cause du nombre de cas à considérer. On préférera utiliser la caractérisation suivante :

Proposition 3.2.2 (Condition d'indépendance de n variables aléatoires) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Les X_i sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Démonstration : Voir la démonstration de sup.

Proposition 3.2.3 (Événements et n aléatoires indépendantes) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes indépendantes. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ soit A_i une partie de $X_i(\Omega)$. Alors les événements $(X_i \in A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants :

$$\forall J \subset \{1, \dots, n\}, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$$

Démonstration : Soit $J \subset \{1, \dots, n\}$. On a :
$$\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j) \right) = \bigcup_{(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} A_j} \left(\bigcap_{j \in J} (X_j = x_j) \right)$$

et cette réunion est disjointe. Comme les A_j sont dénombrable, alors le produit cartésien $\prod_{j \in J} A_j$

l'est aussi, car nous avons un nombre fini d'ensemble qui le constituent. Ainsi
$$P \left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j) \right) =$$

$$\sum_{(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} A_j} P \left(\bigcap_{j \in J} (X_j = x_j) \right) = \sum_{(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} A_j} \prod_{j \in J} P(X_j = x_j).$$
 En utilisant le même argument de

sommabilité que la proposition 3.2.1, mais cette fois-ci avec $|J|$ sommes, on a :

$$\sum_{(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} A_j} \prod_{j \in J} P(X_j = x_j) = \prod_{j \in J} \sum_{x_j \in A_j} P(X_j = x_j) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j).$$

Exemple 3.2.2 1. Soient p_1, \dots, p_n dans $[0, 1]$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(p_1), \dots, \mathcal{B}(p_n)$. Quelle est la loi de $Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$?

2. (**CCP 102**) Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère X_1, \dots, X_N des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et suivant une loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = \min(X_1, \dots, X_N)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$, puis $P(Y \leq n)$ et $P(Y = n)$.

(b) Reconnaître la loi de Y .

Remarque 3.2.3 Attention l'indépendance implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive. Par exemple soient X et Y deux variables aléatoires de même loi et indépendantes avec $P(X = 1) = P(X = -1) = 1/2$. On pose $Z = XY$.

On a : $P(Z = 1) = P((X = 1, Y = 1) \cup (X = -1, Y = -1)) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 1) = P(X = -1)P(Y = -1) + P(X = 1)P(Y = 1) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, car la réunion

$(X = 1, Y = 1) \cup (X = -1, Y = -1)$ est disjointe et ensuite X et Y sont indépendantes.

Z étant à valeurs dans $\{1, -1\}$, on a : $P(Z = -1) = 1/2$.

Soit $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{1, -1\}$. On a : $P(Z = \epsilon_1, X = \epsilon_2) = P(Y = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \epsilon_1 \epsilon_2, X = \epsilon_2) =$

$P(Y = \epsilon_1 \epsilon_2)P(X = \epsilon_2) = 1/4 = P(Z = \epsilon_1)P(X = \epsilon_2)$. Ainsi X et Z sont indépendantes. De même Z

et Y sont indépendantes. On a donc l'indépendance deux à deux. Cependant :

$P(Z = 1, X = 1, Y = -1) = 0 \neq 1/8 = P(Z = 1)P(X = 1)P(Y = -1)$.

Proposition 3.2.4 (Loi binomiale comme somme de Bernoulli indépendantes)

X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la loi $\mathcal{B}(p)$.

Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi

Proposition 3.2.5 (Lemme des coalitions) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et $f : (X_1, \dots, X_k)(\Omega) \rightarrow F$ et $g : (X_{k+1}, \dots, X_n)(\Omega) \rightarrow G$ deux applications. Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration : Montrons d'abord le résultat pour $n = 2$ et $k = 1$.
Notons $Y_1 = f(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$. Tout d'abord Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires.
Fixons $y_1 \in Y_1(\Omega)$ et $y_2 \in Y_2(\Omega)$. Remarquons que :

$$[Y_1 = y_1] = \{\omega \in \Omega / f(X_1(\omega)) = y_1\} = \{\omega \in \Omega / X_1(\omega) \in f^{-1}(\{y_1\})\} = [X_1 \in f^{-1}(\{y_1\})]$$

et $[Y_2 = y_2] = [X_2 \in g^{-1}(\{y_2\})]$. Or X_1 et X_2 sont indépendantes, donc les événements $[X_1 \in f^{-1}(\{y_1\})]$ et $[X_2 \in g^{-1}(\{y_2\})]$ le sont aussi. Ainsi $[Y_1 = y_1]$ et $[Y_2 = y_2]$ sont indépendants pour tout $y_1 \in Y_1(\Omega)$ et $y_2 \in Y_2(\Omega)$ donc Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On montre ensuite que les deux vecteurs aléatoires $Y = (X_1, \dots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendants.

Soient $(x_1, \dots, x_k) \in \prod_{i=1}^k X_i(\Omega)$ et $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in \prod_{i=k+1}^n X_i(\Omega)$,

$$(Y = (x_1, \dots, x_k)) = \bigcap_{i=1}^k (X_i = x_i) \text{ et } (Z = (x_{k+1}, \dots, x_n)) = \bigcap_{i=k+1}^n (X_i = x_i).$$

On en déduit, d'après l'indépendance des variables X_i que

$$P((Y = (x_1, \dots, x_k)) \cap (Z = (x_{k+1}, \dots, x_n))) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

De même

$$P(Y = (x_1, \dots, x_k)) \times P(Z = (x_{k+1}, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^k P(X_i = x_i) \times \prod_{i=k+1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

On a bien montré que Y et Z étaient indépendantes.

En rassemblant les deux points $f(Y) = f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(Z) = g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Définition 3.2.3 (Famille de variables aléatoires indépendantes) Soit I un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que c'est une famille de variables aléatoires indépendantes si toute sous-famille finie est constituée de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 3.2.1 (Réalisation d'une suite de variables aléatoires) Pour toute suite (P_n) de lois de probabilité discrètes, il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et une suite (X_n) de variables aléatoires discrètes indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) telle que, pour tout n de \mathbb{N} , la loi P_{X_n} soit P_n .

Démonstration : Admis.

Définition 3.2.4 (Suite de variables aléatoires iid) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que que ces variables aléatoires sont indépendantes identiquement distribuées, noté *i.i.d.*, si toutes ces variables aléatoires sont de même loi et la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante.

Exemple 3.2.3 1. On parle de processus de Bernoulli de paramètre p lorsque l'on a une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Par exemple si on note X la variable aléatoire donnant le premier n tel que $(X_n = 1)$, alors X suit une loi

2. Soient $q \in \mathbb{N}$, avec $q \geq 3$ et $(\theta_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi uniforme sur $\{0, 1/q, 2/q, \dots, (q-1)/q\}$. On pose $T_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n + 3 + \sin(2\pi(T_n - \theta_n))$. Montrer que T_n et θ_n sont indépendantes tout n de \mathbb{N} .
3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p , avec $0 < p < 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on note Y_k le temps d'attente du k -ème succès. On pose $Z_1 = Y_1$ et pour $k \geq 2$: $Z_k = Y_k - Y_{k-1}$. Montrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On posera $q = 1 - p$.

4 Moyenne et dispersion

4.1 Espérance

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1 (Espérance) 1. Soit X une variable aléatoire discrète, à valeur dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. L'espérance de X notée $\mathbf{E}(X)$ est la somme de la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ dans $[0, +\infty]$ soit :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète complexe. On dit que X est d'espérance finie si l'espérance de $|X|$ est finie, c'est-à-dire que la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas l'espérance de X notée $\mathbf{E}(X)$ est la somme dans \mathbb{R} :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Dans ce cas, on notera cela : $X \in L^1$.

3. On dit que X est centré si $\mathbf{E}(X) = 0$.

Remarque 4.1.1 1. Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et que l'espérance de X est finie, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|P(X = x_n) \text{ converge et : } \mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_nP(X = x_n)$$

2. Dans le cas de convergence absolue, la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_nP(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération des valeurs x_n . C'est en effet le cas de n'importe quelle série absolument convergente.

3. Si $X(\Omega)$ est fini alors nécessairement $\mathbf{E}(X)$ existe.

4. On parle de moyenne pondérée car on peut aussi écrire dans le cas fini : $\mathbf{E}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_iP(X = x_i)}{\sum_{i=1}^n P(X = x_i)}$.

5. $\mathbf{E}(X)$ ne dépend que de la loi de X . On pourra donc parler d'espérance d'une loi.

6. Dans le cas d'une variable aléatoire X positive, si $P(X = +\infty) > 0$, alors

$(+\infty) \times P(X = +\infty) = +\infty$ et donc $\mathbf{E}(X) = +\infty$.

Si $P(X = +\infty) = 0$, on adoptera la convention $(+\infty) \times P(X = +\infty) = 0$.

Exemple 4.1.1 1. (**CCP 100**) On a vu qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \text{ existait bien. Montrer que } X \text{ admet une espérance.}$$

$$\text{Le calcul de celle-ci donne : } \mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4 \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{4}{(n+1)(n+2)} =$$

$$4 \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 4 \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) = 2, \text{ grâce à un télescopage.}$$

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[r, +\infty[\cap \mathbb{N}$, avec r dans \mathbb{N}^* et telle que :

$$\forall n \in [r, +\infty[\cap \mathbb{N}, P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \text{ avec } p \text{ dans }]0, 1[. \text{ Montrer que } X \text{ admet}$$

une espérance et déterminer $\mathbf{E}(X)$. On rappelle que : $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Proposition 4.1.1 (Espérance nulle d'une variable aléatoire positive) Soit X une variable aléatoire discrète positive telle que $E(X) = 0$. Alors $X = 0$ presque-sûrement.

Démonstration : On pose $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ si $X(\Omega)$ est dénombrable, le cas fini se traitant de la même manière. Ainsi on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) = 0$. C'est une somme de nombres positifs, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n P(X = x_n) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, si x_n est non nul, alors $P(X = x_n) = 0$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(X = x_k) \neq 0$ et donc par contraposée $x_k = 0$. Ainsi comme pour $n \neq k$, on a $P(X = x_n) = 0$, car $x_n \neq x_k$, alors $1 = P(X = x_k) = P(X = 0)$, donc $X = 0$ presque-sûrement.

Proposition 4.1.2 (Autre formule de l'espérance) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = \sum_{l=0}^{+\infty} P(X > l).$$

Démonstration : Si $a = P(X = +\infty) > 0$, alors grâce au dernier point de la remarque 4.1.1, on a : $E(X) = +\infty$ et de plus : $\forall x \in \mathbb{N}^*, P(X \geq k) \geq P(X = +\infty) = a$ et comme $a > 0$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a = +\infty$

et donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = +\infty$.

On suppose maintenant que $P(X = +\infty) = 0$ et on peut supposer que X soit à valeurs dans \mathbb{N} .

Montrons d'abord la relation : $\sum_{k=0}^N kP(X = k) = \sum_{k=1}^N P(X \geq k) - NP(X \geq N + 1)$, pour N dans \mathbb{N}^* .

On suppose que X est dans L^1 . Montrons le résultat dans ce cas :

On suppose que X n'est pas dans L^1 .

Remarque 4.1.2 Ainsi pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, X est dans L^1 si et seulement si $\sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ converge.

Exemple 4.1.2 1. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère X_1, \dots, X_N des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et suivant une loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = \min(X_1, \dots, X_N)$. Déterminer $E(Y)$.

2. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On effectue à partir de cette urne n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer $E(X)$.

Proposition 4.1.3 (Espérance pour Ω fini) Si Ω est un ensemble fini, alors

$$E(X) =$$

4.1.2 Espérance de lois classiques

Proposition 4.1.4 (Espérance d'une loi quasi constante) Si X est une variable aléatoire réelle constante ou quasi constante (il existe $x \in \mathbb{R}$ telle que $P(X = x) = 1$) alors

$$E(X) = E(x) =$$

Proposition 4.1.5 (Espérance d'une loi uniforme) Soit X une variable aléatoire ayant pour valeurs x_1, \dots, x_n et suivant une loi uniforme. Alors

$$E(X) =$$

Ainsi $E(X)$ est la moyenne naturelle de x_1, \dots, x_n .

Exemple 4.1.3 Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors $E(X) =$

Proposition 4.1.6 (Espérance d'une loi de Bernoulli) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors

$$E(X) =$$

Exemple 4.1.4

Soit $A \in \mathcal{A}$. On a $E(\mathbf{1}_A) =$

Proposition 4.1.7 (Espérance d'une loi binomiale) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Alors

$$E(X) =$$

Exemple 4.1.5 On reprend l'exemple 3.1.3. Un employé d'un centre d'appels effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche (de façon indépendante des autres) avec une probabilité p . On note X le nombre de correspondants qui ont décroché. L'employé rappelle un peu plus tard les $n - X$ correspondants qui n'ont pas décrochés lors de sa première série d'appels. On note Y le nombre de ces correspondants qui décrochent cette fois. On note $Z = X + Y$.

1. (**CCP 98**) Quelle est l'espérance de Z ?
2. Déterminer $E(Y)$ à l'aide de Z .
3. Déterminer $E(Y)$ sans passer par Z .

Proposition 4.1.8 (Espérance d'une loi géométrique) Si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors :

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Démonstration :

Exemple 4.1.6 1. (CCP 102) Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$. Déterminer $E(Y)$.

2. Une urne contient N boules. On effectue des tirages avec remise. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de tirages nécessaires pour tirer une deuxième fois la boule obtenue au premier tirage. Calculer $E(X)$.

Proposition 4.1.9 (Espérance d'une loi de Poisson) Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors :

$$E(X) = \lambda.$$

Démonstration :

4.1.3 Propriétés de l'espérance

Proposition 4.1.10 (Formule de transfert) Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète. Soit f une fonction de $X(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

La variable $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas :

$$E(f(X)) =$$

L'espérance de $f(X)$ est entièrement déterminée par P_X et f .

Démonstration : Démonstration : Soit Y la variable aléatoire $Y = f(X)$. Pour $y \in Y(\Omega)$, on note $A_y = f^{-1}(\{y\})$, c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de y par f . La famille $(A_y)_{y \in Y(\Omega)}$ est une partition au plus dénombrable de $X(\Omega)$ et :

$$[Y = y] = \{\omega / f(X(\omega)) = y\} = \{\omega / X(\omega) \in A_y\} = \bigcup_{x \in A_y} \{\omega / X(\omega) = x\} = \bigcup_{x \in A_y} [X = x]$$

d'où comme la réunion est disjointe : $P(Y = y) = \sum_{x \in A_y} P(X = x)$.

1. Supposons d'abord que la famille $\left(f(x)P(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Alors, on peut sommer par paquets des termes positifs :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in A_y} |f(x)|P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} |y| \sum_{x \in A_y} P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} |y|P(Y = y).$$

Par conséquent Y a une espérance finie. Les égalités précédentes sont alors encore vraies sans les valeurs absolues et ainsi :

$$E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

2. Réciproquement, supposons que Y est d'espérance finie. Alors $\left(|y|P([Y = y])\right)_{y \in Y(\Omega)}$ est sommable, donc on peut sommer par paquets des termes positifs :

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} |y|P([Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in A_y} |f(x)|P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|P(X = x).$$

Ainsi la famille $\left(f(x)P(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, c'est-à-dire $f(X)$ admet une espérance.

Remarque 4.1.3 *En particulier si la variable aléatoires considérée est un couple de variable aléatoire discrètes (X, Y) , la formule de transfert s'écrit :*

$$E(f(X, Y)) =$$

Exemple 4.1.7 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer $E(1/X)$.

2. (**CCP 97**) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 , dont la loi est donnée par : $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}$. Montrer que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Proposition 4.1.11 (Linéarité, positivité, croissante de l'espérance) Soient $X, Y \in L^1$.

1. Pour tout a, b de \mathbb{K} , $aX + bY$ admet une espérance et : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
2. Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.
3. Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.
4. $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Démonstration :

1. On pose $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(u_n, v_n), n \in \mathbb{N}\}$ la formule de transfert appliquée respectivement aux fonctions : $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ permettent d'avoir sous réserve d'existence :

$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n P(X = u_n, Y = v_n)$ et $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n P(X = u_n, Y = v_n)$. De plus ces deux séries convergent absolument car par exemple $E(|X|)$ existe et donc en utilisant la formule de transfert

$(x, y) \mapsto |x|$, on a : $E(|X|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| P(X = u_n, Y = v_n)$ qui converge. Ainsi la série

$\sum (au_n + bv_n) P(X = u_n, Y = v_n)$ converge absolument et donc : $aX + bY$ admet une espérance.

Sa valeur est : $E(aX + bY) = \sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bv_n) P(X = u_n, Y = v_n) =$

$$a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n P(X = u_n, Y = v_n) + b \sum_{n=0}^{+\infty} v_n P(X = u_n, Y = v_n) = aE(X) + bE(Y).$$

2. Si $X \geq 0$, alors $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, avec tous les x_n positifs et donc :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \geq 0.$$

3. Si $X \leq Y$, alors $0 \leq E(Y - X) = E(Y) - E(X)$, par linéarité.

4. Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| P(X = x_n)$ converge par hypothèse, donc $E(|X|)$ existe par

la formule de transfert. De plus $|E(X)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| P(X = x_n) = E(|X|)$.

Exemple 4.1.8 1. (**CCP 95**) Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(5, 1/5)$ et on pose $Y = 5X - 15$. Déterminer l'espérance de X et Y .

2. (**CCP 111**) Soit $p \in]0, 1[$ et Y à valeurs dans \mathbb{N} telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = p(1 - p)^n$.
 - (a) Déterminer la loi de $Z = Y + 1$.
 - (b) Déterminer l'espérance de Y .

3. Un ascenseur amène m personnes à n étages, chaque personne s'arrêtant à un étage de façon équiprobable. Quel est le nombre moyen d'arrêts (pour faire ceci on posera X la variable aléatoire donnant le nombre d'étages au niveau desquels l'ascenseur ne s'est pas arrêté)? Quelle est la limite de ce nombre quand m tend vers $+\infty$? Interpréter. Mêmes questions pour n qui tend vers $+\infty$.

4. Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète. Par quelle loi peut-on modéliser la variable $X_{k+1} - X_k$? En déduire l'espérance de X_N .

Proposition 4.1.12 (Comparaison et espérance) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , telles que $|X| \leq Y$. Si Y est dans L^1 , alors X aussi.

Démonstration : Notons $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$, avec I et J dénombrables. Grâce au système complet d'événements $([Y = y_j])_{j \in J}$, on a pour tout $i \in I$:

$$|x_i|P(X = x_i) = |x_i| \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \leq \sum_{j \in J} y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j]). \quad (1)$$

Or la famille $\left(y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j])\right)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable de somme $E(Y)$. En effet, les égalités suivantes sont licites puisque Y est positive et admet une espérance finie :

$$E(Y) = \sum_{j \in J} y_j P(Y = y_j) = \sum_{j \in J} y_j \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

Ainsi l'inégalité (1) permet d'affirmer que X admet une espérance finie.

Exemple 4.1.9 Si X est une variable aléatoire bornée, alors X est d'espérance finie, car

En particulier, si Y est une variable aléatoire réelle et discrète, alors $\cos(Y)$ est d'espérance finie.

Proposition 4.1.13 (Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes)

(Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes dans L^1 . Alors $E(XY)$ existe et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démonstration : On note $X(\Omega) = \{x_k / k \in K\}$ et $Y(\Omega) = \{y_\ell / \ell \in L\}$, avec K et L des ensembles au plus dénombrables. On considère le couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^2 et f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = |xy|$. Alors, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $|XY|$ admet une espérance finie si et seulement si la famille

$\left(|x_k y_\ell| P([(X, Y) = (k, \ell)])\right)_{(k, \ell) \in K \times L}$ est sommable. Or X et Y sont d'espérances finies, d'où :

$$\left(\sum_{k \in K} |x_k| P(X = x_k)\right) \left(\sum_{\ell \in L} |y_\ell| P(Y = y_\ell)\right) = \sum_{(k, \ell) \in K \times L} |x_k y_\ell| P(X = x_k) P(Y = y_\ell) \text{ qui est fini.}$$

De plus X et Y sont indépendantes, ce qui permet d'affirmer que :

$\forall (k, \ell) \in K \times L, P(X = x_k) P(Y = y_\ell) = P((X, Y) = (x_k, y_\ell))$. On en déduit ainsi que $|XY|$ admet une espérance finie.

Les égalités ci-dessous sans les valeurs absolues sont donc encore valables et prouvent que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Corollaire 4.1.1 Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur le même espace. Alors on a $E(X_1 X_2 \dots X_n) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$.

Démonstration : Par récurrence.

Exemple 4.1.10 1. On reprend l'exemple 3.2.3. Soient $q \in \mathbb{N}$, avec $q \geq 3$ et $(\theta_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi uniforme sur $\{0, 1/q, 2/q, \dots, (q-1)/q\}$. On pose $T_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n + 3 + \sin(2\pi(T_n - \theta_n))$. Déterminer $E(T_n)$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{ij} pour $1 \leq i, j \leq n$, des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, telles que $P(A_{ij} = 1) = P(A_{ij} = -1) = 1/2$. On note A la matrice $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Déterminer l'espérance de $\det(A)$

Remarque 4.1.4 ATTENTION : on peut avoir $E(XY) = E(X)E(Y)$ sans que X et Y soient indépendantes.

Par exemple, on considère le couple (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant

$Y \backslash X$	$X = 1$	$X = -1$	Loi de Y
$Y = -1$	1/8	1/8	1/4
$Y = 0$	3/8	1/8	1/2
$Y = 1$	1/8	1/8	1/4
Loi de X	5/8	3/8	1

La loi de XY est donc donnée par $P(XY = 1) = P(XY = -1) = 1/4$ et $P(XY = 0) = 1/2$.

On a donc $E(XY) = 0$. Comme $E(X) = 1/4$ et $E(Y) = 0$, on a bien : $E(XY) = E(X)E(Y)$. Cependant, $P(X = 1, Y = 1) = 1/8 \neq P(X = 1)P(Y = 1) = 5/32$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4.2 Variance

La variance et l'écart type sont des mesures de dispersion autour de la moyenne (espérance). L'écart type s'exprime avec la même unité que la variable aléatoire.

Définition 4.2.1 (Espace L^2) Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si X^2 est d'espérance finie, on dit que X est dans L^2 .

Proposition 4.2.1 ($E(X^2)$ existe implique que $E(X)$ existe) Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^2 . Alors X est dans L^1 ($E(X)$ existe).

Démonstration :

Définition 4.2.2 (Variance, écart type) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète dans L^2 ($E(X^2)$ existe). La variance de X est notée $V(X)$ et est la moyenne des carrés des écarts des valeurs de X par rapport à leur moyenne.

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

L'écart type est la racine carrée de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

On dit que X est réduite si $V(X) = 1$.

Remarque 4.2.1 1. La variance est bien définie, car $(X - \mathbf{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbf{E}(X)X + (\mathbf{E}(X))^2$. Comme $\mathbf{E}(X)$ est une constante, alors l'espérance de $(X - \mathbf{E}(X))^2$ est finie en tant que combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance.

2. L'écart type est bien défini, car d'après la croissance de l'espérance et le fait que : $(X - \mathbf{E}(X))^2 \geq 0$, on a : $V(X) \geq 0$.
3. La variance mesure la proximité de X par rapport à la moyenne, c'est-à-dire la dispersion de la variable aléatoire X . On aurait pu s'intéresser à $\mathbf{E}(|X - \mathbf{E}(X)|)$, l'écart moyen, mais on a préféré $\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$, car on a plus de propriétés calculatoires.
4. Il y a une différence entre la variance et l'écart type. On peut voir la variance comme une longueur au carrée, ainsi elle n'a pas la même « unité » que $\mathbf{E}(X)$. L'écart type, lui est homogène à une longueur, donc comparable à $\mathbf{E}(X)$.
5. Deux variables aléatoires X et Y ayant la même loi, ont la même variance.

Exemple 4.2.1 (CCP 100) Soit X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$.

Est-ce que X admet une variance ?

Proposition 4.2.2 (Variance nulle) Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète dans L^2 . Si $V(X) = 0$, alors X est presque-sûrement constante. En particulier $X = \mathbf{E}(X)$ presque-sûrement.

Démonstration : $(X - \mathbf{E}(X))^2$ est une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance nulle, donc $(X - \mathbf{E}(X))^2 = 0$ presque-sûrement, soit $X = \mathbf{E}(X)$ presque-sûrement.

Proposition 4.2.3 (Formule de König-Huygens) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète dans L^2 .

$$V(X) =$$

Démonstration : Identique à celle de sup.

Remarque 4.2.2 Pour calculer une variance et en particulier $\mathbf{E}(X^2)$, parfois il peut être pratique de calculer $\mathbf{E}(X(X \pm 1))$, en effet, : $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X(X \pm 1)) \mp \mathbf{E}(X)$.

Exemple 4.2.2 Un sauteur en hauteur doit franchir successivement une série de barres de plus en plus hautes ; toutes les barres doivent être franchies et le parcours s'arrête au premier échec. La probabilité de passer la n -ème hauteur est $1/n$. Soit X le nombre de sauts réussis. Quelle est la variance de X ?

Proposition 4.2.4 (Opérations sur la variance) Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle dans L^2 Soit a et b deux réels

$$\begin{aligned}V(aX + b) &= \\ \sigma(aX + b) &= \end{aligned}$$

Démonstration : Voir la démonstration de sup.

Proposition 4.2.5 (Construction d'une variable aléatoire centrée réduite) Soit X une variable aléatoire non presque-sûrement constante ($\sigma(X) > 0$) dans L^2 . On pose $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$. Alors X^* est une variable aléatoire centrée et elle est aussi réduite.

Démonstration :

Proposition 4.2.6 Soient X une variable aléatoire réelle, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Si X suit une loi $\mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$, alors $V(X) =$
2. Si X suit une loi $\mathcal{B}(p)$, alors $V(X) =$
3. Si X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) =$
4. Si X suit une loi $\mathcal{G}(p)$, alors $V(X) =$
5. Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $V(X) =$

Démonstration : Montrons les deux derniers points.

Exemple 4.2.3 1. (**CCP 98**) Soit Z suivant une loi $\mathcal{B}(n, p(2 - p))$, alors

$$V(Z) =$$

2. (**CCP 95**) Soit X une variable aléatoire suivante une loi $\mathcal{B}(5, 1/5)$ et on pose $Y = 5X - 15$. Déterminer la variance de X et Y .

4.3 Covariance

Proposition 4.3.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes dans L^2 . Alors XY admet une espérance ($XY \in L^1$) et :

$$|\mathbf{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)}.$$

On a égalité si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\alpha X + \beta Y = 0$ presque-sûrement.

Démonstration :

Définition 4.3.1 (Covariance,) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes admettant une variance. La covariance de X et Y , notée $\text{cov}(X, Y)$ est le réel

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X)) \cdot (Y - \mathbf{E}(Y))].$$

Proposition 4.3.2 (Opérations sur la covariance) 1. $\text{cov}(X, Y) =$

2. $\text{cov}(X, X) = \mathcal{V}(X)$.

3. Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) =$

Démonstration : Voir démonstration de sup.

Remarque 4.3.1 1. *cov* est bilinéaire : si X, Y, Z sont trois variables aléatoires et λ un réel, alors $\text{cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$ et $\text{cov}(X, \lambda Y + Z) = \lambda \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z)$. Cela provient de la linéarité de $X \mapsto \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$ et $Y \mapsto \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$.

2. La covariance est symétrique : $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.

Proposition 4.3.3 (Variance d'une somme) 1. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On a : $\mathcal{V}(X + Y) =$

2. Plus généralement si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes admettant une variance, on a :

$$\mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) =$$

Démonstration : Voir démonstration de sup.

Corollaire 4.3.1 (Variance et indépendance) 1. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant un moment d'ordre 2. On a : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

2. X_1, \dots, X_n , sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes admettant un moment d'ordre 2, alors : $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$.

Démonstration : Voir démonstration de sup.

Exemple 4.3.1 1. (**CCP 103**) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre respectifs λ_1 et λ_2 . On pose $Z = X_1 + X_2$. Déterminer l'espérance et la variance de Z . Quand avons-nous eu besoin de l'indépendance ?

2. On reprend l'exemple 3.2.3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p , avec : $0 < p < 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on note Y_k le temps d'attente du k -ème succès. Quelle est la variance de Y_k ?

3. Une urne contient $2n$ boules. Parmi ces boules n portent le numéro 0 et les n autres portent les numéros de 1 à n . On tire n boules de l'urne. Pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i a été tirée et 0 sinon.

(a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la loi de X_i , puis déterminer $\text{cov}(X_i, X_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

(b) Soit S la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.

4.4 Loi faible des grands nombres

Théorème 4.4.1 (Inégalité de Markov) Soit X est une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,$$

Démonstration :

Remarque 4.4.1 Si X est de signe quelconque, on a donc : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$.

Exemple 4.4.1 Soient $X, Y, (X_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires réelles, discrètes et bornées, définies sur le même espace probabilisé. On suppose que les X_i sont indépendantes. Nous rappelons que nous avons démontré dans le cours sur les séries entières que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} \lambda \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$.

1. Soit $\lambda > 0$. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{P}(Y \geq a) \leq e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{\lambda Y})$.
2. En déduire que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|Y| \geq a) \leq e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{\lambda Y}) + e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{-\lambda Y})$.
3. Soient $\lambda \geq 0$ et $x \in [-1, 1]$. Montrer que : $\exp(\lambda x) \leq \operatorname{ch}(\lambda) + x \operatorname{sh}(\lambda) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + x \operatorname{sh}(\lambda)$.
4. Démontrer que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ et est centrée, alors on a pour tout $\lambda \geq 0$, on a : $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$ et $\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$.
5. Montrer que si les variables aléatoires indépendantes X_i prennent leurs valeurs dans $[-1, 1]$ et sont centrées, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}\left(\left|n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq a\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)$.

Théorème 4.4.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) (Énoncé CCP 99) Si X est une variable aléatoire discrète réelle dans L^2 , et si t est un réel strictement positif,

Démonstration :

Exemple 4.4.2 Soient $\theta, x \in \mathbb{R}_+^*$ distincts. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\theta} \sum_{k \leq nx} \frac{(n\theta)^k}{k!}$. On distinguera les cas $x < \theta$ et $\theta < x$.

Théorème 4.4.3 (Loi faible des grands nombres) (Démonstration CCP 99) Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes dans L^2 i.i.d.. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et on note m l'espérance commune de Y_1, \dots, Y_n ($m = \mathbf{E}(Y_1)$) et σ leur écart-type commun ($\sigma = \sigma(Y_1)$).

On a : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq a\right) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$.

En particulier : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq a\right) = 0$.

Démonstration :

Remarque 4.4.2 On pose $\bar{Y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$, qui est la moyenne empirique des résultats Y_1, \dots, Y_n . Ce théorème montre que plus n est grand, plus la probabilité de voir \bar{Y}_n s'approcher de son espérance m est proche de 1. La loi des grands nombres justifie l'interprétation fréquentiste des probabilités. En effet si on regarde la fréquence d'un événement lorsque l'on répète indéfiniment une expérience aléatoire, celle-ci tend vers la probabilité à priori de cet événement.

Exemple 4.4.3 1. Soient $x \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire S_n suivant une loi $\mathcal{B}(n, x)$. Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

2. (**CCP 99**) Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement avec remise des boules de cette urne. À partir de combien de tirages peut-on garantir à 95% que la proportion de boules rouges tirées est dans l'intervalle $]0, 35; 0, 45[$.

4.5 Fonctions ou séries génératrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

Définition 4.5.1 (Fonctions génératrices) (Énoncé CCP 110) On appelle fonction ou série génératrice de la variable aléatoire X la fonction

$$G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n) = E(\quad)$$

Remarque 4.5.1 1. (CCP 110) La formule avec l'espérance s'obtient grâce à la formule de transfert.

2. Si X a un nombre fini de valeurs, alors G_X est

Proposition 4.5.1 (La série entière G_X) 1. $G_X(1) =$

2. (Démonstration CCP 96/110) La série génératrice G_X d'une variable aléatoire entière est une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1 et G_X est au moins définie sur

3. (Énoncé et démonstration CCP 110) Soit on a : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) =$

4. Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans \mathbb{N} ont la même loi si et seulement si

Démonstration :

Proposition 4.5.2 1. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, 1)$.

2. G_X est continue sur $[-1, 1]$.

Démonstration :

Exemple 4.5.1 Soit X une variable aléatoire telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$. Quelle est la fonction génératrice de X ? de $3X$?

Proposition 4.5.3 (Fonctions génératrices de lois usuelles)

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $G_X(t) = (1-p) + tp$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $G_X(t) = ((1-p) + tp)^n$.

3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$ et le rayon de convergence est

4. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $G_X(t) = e^{-\lambda + \lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$ et le rayon de convergence est

Démonstration :

Proposition 4.5.4 (Fonctions génératrices et espérances) X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1.

Si tel est le cas, alors $E(X) = G'_X(1)$.

Démonstration : Si $E(X)$ existe.

Réciproquement si G_X est dérivable en 1 :

Remarque 4.5.2 *On retrouve ainsi aisément les espérances des variables aléatoires usuelles.*

Exemple 4.5.2 *Retrouver les espérances de X lorsque X suit une loi $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.*

Proposition 4.5.5 (Fonctions génératrices et variances) *X est dans L^2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.*

Si tel est le cas, alors $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

Démonstration : Comme précédemment, si $E(X^2)$ existe alors $E(X)$ aussi, les séries $\sum n^2 P(X = n)$ et $\sum n P(X = n)$ convergent donc et $\sum n(n-1)P(X = n)$ converge aussi et le théorème de dérivation des séries de fonction s'applique deux fois, prouvant que

$$G_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X = n) = E(X(X-1))E(X^2) - E(X)^2 \quad (\text{par la formule de transfert}) \text{ donc}$$

$$E(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1).$$

$$\text{Et finalement } V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$

Inversement, si G_X est deux fois dérivable en 1, alors comme précédemment on montre que :

$\sum n(n-1)P(X = n)$ converge donc $\sum n^2 P(X = n)$ aussi et X^2 est donc d'espérance finie.

Remarque 4.5.3 1. *On retrouve ainsi aisément les variances des variables aléatoires usuelles.*

2. *La formule de la variance est plus à savoir retrouver qu'à apprendre.*

$$\text{En effet } G_X''(1) =$$

$$\text{puis } E(X^2) =$$

Exemple 4.5.3 *Retrouver les variances de X lorsque X suit une loi $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.*

Remarque 4.5.4 Par récurrence sur $n \geq 1$, on peut démontrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , alors G_X est r fois dérivable en 1, si et seulement si X^r admet une espérance et dans ce cas : $G_X^{(r)}(1) = \mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1))$. Ceci nous permet de calculer $\mathbf{E}(X^r)$, à l'aide de $\mathbf{E}(X), \dots, \mathbf{E}(X^{r-1})$.

Proposition 4.5.6 1. Soient deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans \mathbb{N} indépendantes. Alors on a : $G_X G_Y = G_{X+Y}$.

2. Plus généralement soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} mutuellement indépendantes. Alors on a : $G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \times \dots \times G_{X_n}$.

Démonstration : Donnons deux démonstrations pour le premier point :

Le deuxième point se prouve par récurrence.

Remarque 4.5.5 La réciproque est fausse.

Exemple 4.5.4 1. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant respectivement une loi $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Alors $X + Y$ suit une loi

2. (**CCP 110 et 103**) Soient X et Y deux variables indépendantes suivant respectivement une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Alors $X + Y$ suit une loi

Remarque 4.5.6 On remarque que cette démonstration est bien plus courte que celle employée dans l'exemple 3.2.1.

Exemple 4.5.5 1. (**CCP 96**) Dans une urne se trouvent 4 boules numérotées 0, 1, 1, 2. On effectue n tirages indépendants d'une boule avec remise, et on note X la somme des résultats obtenus. Déterminer la fonction génératrice de X , puis sa loi.

2. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes et Y suit une loi $\mathcal{G}(1/2)$ et $X = Y + Z$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* et vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$. Déterminer la loi de Z .

3. (**Formule de Wald**)

Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi sur (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans \mathbb{N} . Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $\forall \omega \in \Omega, S_p(\omega) = \sum_{k=1}^p X_k(\omega)$ et $S_0 = 0$. On considère une variable aléatoire N , à valeurs dans \mathbb{N} , sur le même espace probabilisé, indépendante des variables X_k . On définit une variable aléatoire Y par : $Y = S_N$.

(a) Déterminer G_Y en fonction de G_N et G_X avec $X = X_1$.

(b) Lorsque $E(X)$ et $E(N)$ existent, montrer que $E(Y)$ existe et l'exprimer en fonction de $E(X)$ et $E(N)$.

5 Résumé concernant les lois classiques

En notant $q = 1 - p$.

Nom	Paramètres	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$	G_X	RCV
Constante	c	$\{c\}$	1	c	0	t^c ($c \in \mathbb{N}$)	$+\infty$
Uniforme	$a < b \in \mathbb{N}$	$\llbracket a, b \rrbracket$	$\frac{1}{b - a + 1}$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$	$\frac{t^a - t^{b+1}}{(b - a + 1)(1 - t)}$	$+\infty$
Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\{0, 1\}$	p ($k = 1$)	p	pq	$q + pt$	$+\infty$
Binomiale	$(n, p) \in \mathbb{N} \times]0, 1[$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	$(q + pt)^n$	$+\infty$
Géométrique	$p \in]0, 1[$	\mathbb{N}^*	pq^{k-1}	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$	$\frac{pt}{1 - qt}$	$\frac{1}{q}$
Poisson	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	\mathbb{N}	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$+\infty$

6 Complément : démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$

(polynôme de Bernstein).

On considère S_n qui est une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n, x)$.

1. Montrer que $\mathbb{E} \left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right] = B_n(f)(x)$.
2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier qu'il existe α dans \mathbb{R}_+^* tel que :
 $\forall a, b \in [0, 1], |a - b| \leq \alpha \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$.
Majorer $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$, pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$ vérifiant $|k/n - x| \leq \alpha$.
3. Montrer que $\left| \sum_{|k/n-x|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.
4. Montrer qu'il existe n_0 dans \mathbb{N} tel que : $\forall n \geq n_0, \|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$.
5. En déduire que toute fonction f de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de fonctions polynomiales.