

Avant de commencer, voici quelques notations.

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ définie $I \times J$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit $x \in I$ fixé. On note $u_x : t \mapsto f(x, t)$. Si u_x est dérivable sur J , on note :

$\forall t \in J, \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = u'_x(t)$. On fixe x et on dérive la fonction f par rapport à la variable t .

Si u_x est k fois dérivable, on note : $\forall t \in J, \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) = u_x^{(k)}(t)$.

De même soit $t \in J$ fixé. On note $v_t : x \mapsto f(x, t)$. Si v_t est dérivable sur I , on note :

$\forall x \in I, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = v'_t(x)$. On fixe t et on dérive la fonction f par rapport à la variable x .

Si v_t est k fois dérivable, on note : $\forall x \in I, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = v_t^{(k)}(x)$.

Par exemple si $f : (x, t) \mapsto x^2 t^3$, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} : (x, t) \mapsto 3x^2 t^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} : (x, t) \mapsto 2xt^3.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 6x^2 t, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(x, t) = 6x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x, t) = 0, \quad \text{pour } k \geq 4.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 2t^3 \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = 0 \quad \text{pour } k \geq 3.$$

Rappelons la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $h : I \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction avec I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On a $\lim_a h = \ell$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de I qui tend vers a , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) = \ell$.

1 Continuité

Proposition 1.0.1 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . (I et J deux intervalles de \mathbb{R} .) On suppose que

- (i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- (ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iii) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Démonstration :

Remarque 1.0.1 1. L'hypothèse de domination assure l'intégrabilité de $f(x, \cdot)$.

2. Bien vérifier que la fonction de domination φ soit indépendante de x .

3. L'hypothèse de domination est essentielle : la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $F(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-tx} dt$

n'est pas continue en 0, étant donné que $F(0) = 0$ alors que pour tout $x > 0$:

$F(x) = [-e^{-tx}]_{t=0}^{+\infty} = 1$. En fait on ne peut pas dominer $t \mapsto xe^{-tx}$ par une fonction intégrable indépendante de x .

Exemple 1.0.1 1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+ixt)}$ est continue sur \mathbb{R} .

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} dt$.

Parfois l'hypothèse de domination est impossible à obtenir sur I tout entier. Voici une adaptation de la proposition précédente :

Proposition 1.0.2 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ avec domination locale) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . (I et J deux intervalles de \mathbb{R} .) On suppose que

- (i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- (ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iii) [Domination locale] Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , il existe une fonction φ continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Démonstration : Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment $[a, b]$ non réduit à un point tel que : $x_0 \in [a, b] \subset I$, avec x_0 dans son intérieur si x_0 n'est pas borne de I . Grâce à la proposition 1.0.1, $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur $[a, b]$ et donc en particulier en x_0 . Ceci étant valable pour tout x_0 de I , on a donc la continuité sur I tout entier.

Exemple 1.0.2 Pour x dans \mathbb{R}_+^* , on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Peut-on trouver une fonction de domination pour x variant dans \mathbb{R}_+^* tout entier ?
2. (CCP 50) Montrer que F est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. Étudier la monotonie de F sur \mathbb{R}_+^* .

Proposition 1.0.3 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x, t)$ définie sur un EVN) Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times J$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et J un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
- (ii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iii) Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times J \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J , et la fonction F définie sur A par $F(x) = \int_J f(x, t) dt$ est continue sur A .

L'hypothèse de domination peut être remplacée par une hypothèse de domination au voisinage de tout point :

(iii bis) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a dans A (par exemple une boule fermée $\overline{B}(a, r)$) et une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in V \times J \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Démonstration : Identique aux deux propositions précédentes.

Exemple 1.0.3 Montrer que $F : z \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z \sqrt[3]{t}}}{1 + it^{3/4}} dt$ est continue sur $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Théorème 1.0.1 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu) Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle J . Soit $\lambda_0 \in \overline{I}$ dans \mathbb{R} . On suppose que :

1. pour tout $\lambda \in I$, la fonction f_λ est continue par morceaux sur J ;
2. pour tout $u \in J$, on a : $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(u) = f(u)$, et la fonction f ainsi définie est continue par morceaux sur J ;

3. (Domination) il existe une fonction φ continue par morceaux positive et intégrable sur J telle que pour tout $\lambda \in I$ et pour tout $u \in J$: $|f_\lambda(u)| \leq \varphi(u)$ (hypothèse de domination).

Alors, les fonctions f_λ et leur limite f sont intégrables sur J et :

$$\int_J \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(u) du = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_J f_\lambda(u) du = \int_J f(u) du.$$

Démonstration : Pour $\lambda \in I$, la majoration $|f_\lambda| \leq \varphi$ prouve l'intégrabilité de f_λ sur J .

Utilisons la caractérisation séquentielle d'existence d'une limite et le théorème de convergence dominée. Soit $\lambda_0 \in \bar{I}$ un point adhérent à I (dans $\bar{\mathbb{R}}$) et $(t_n)_n$ une suite de points de I convergeant vers λ_0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction g_n définie sur J par : $g_n(u) = f_{t_n}(u)$. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue par morceaux sur J ;
2. la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur J vers la fonction f ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in J$, $|g_n(u)| \leq \varphi(u)$.

D'après le théorème de convergence dominée, la fonction f est intégrable sur J et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J g_n = \int_J f$,

c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_{t_n} = \int_J f$.

D'après la caractéristion séquentielle de l'existence d'une limite : $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_J f_\lambda = \int_J f = \int_J \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda$.

Remarque 1.0.2 1. (IMPORTANT) Ce résultat sera souvent appliqué lorsque l'on cherchera

$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_J f(\lambda, t) dt$. Il suffira de poser $f_\lambda : t \mapsto f(\lambda, t)$.

2. Ce résultat sert surtout lorsque $\lambda_0 = \pm\infty$, car sinon on pourra appliquer le plus souvent les propositions précédentes.

Si λ_0 est réel, ce théorème permettra par exemple de prolonger par continuité $\lambda \mapsto \int_J f(\lambda, t) dt$ en λ_0 .

3. Si $\lambda_0 = +\infty$ la domination sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, suffit car nous cherchons une limite en $+\infty$.

Exemple 1.0.4 1. Pour x dans \mathbb{R}_+^* , on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

(a) (CCP 50) Montrer que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

(b) (CCP 50) Déterminer un équivalent de F au voisinage de $+\infty$.

(c) Déterminer un équivalent de F au voisinage de 0.

2. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{+\infty} f = l_\infty$ et $\lim_{0^+} f = l_0$ soient des réels. On pose

$$L(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \text{ pour } p \in \mathbb{R}_+^*.$$

(a) Montrer que L est définie sur \mathbb{R}_+^* (on pourra montrer que f est bornée sur \mathbb{R}_+^*).

(b) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} pL(p) = l_0$ et $\lim_{p \rightarrow 0^+} pL(p) = l_\infty$.

2 Dérivabilité

Proposition 2.0.1 (Dérivation de $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$) (Énoncé CCP 30) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . (I et J deux intervalles de \mathbb{R} .) On suppose que

(i) [Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

(ii) [Régularité de f par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .

(iii) [Régularité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ sur morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Démonstration : Soit $x_0 \in I$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de limite nulle avec tous les h_n non nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} = \int_J \frac{f(x_0 + h_n, t) - f(x_0, t)}{h_n} dt$. On note alors f_n la fonction $t \mapsto \frac{f(x_0 + h_n, t) - f(x_0, t)}{h_n}$ définie sur J .

- D'après (i), les fonctions f_n sont continues par morceaux sur J et intégrables.
- D'après (ii), la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t \in J$ on a : $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 donc $f_n(t) = \frac{1}{h_n} \int_{x_0}^{x_0+h_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dx$.

L'hypothèse de domination donne alors :

$$|f_n(t)| \leq \left| \frac{1}{h_n} \int_{x_0}^{x_0+h_n} \varphi(t) dx \right| = \left| \frac{\varphi(t)}{h_n} \int_{x_0}^{x_0+h_n} dx \right| = \varphi(t), \text{ car } \varphi(t) \text{ est indépendant de } x.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n(t) dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$,

autrement dit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$. Le critère séquentiel montre que g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$.

Exemple 2.0.1 Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$.

1. (CCP 30) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
2. (CCP 30) Trouver une équation différentielle (E) vérifiée par F . Résoudre (E).
3. Montrer que F est décomposable en série entière sur \mathbb{R} directement, sans passer par le résultat de l'équation différentielle.

Proposition 2.0.2 (Dérivation de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . (I et J deux intervalles de \mathbb{R} .) On suppose que

(i) [Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

(ii) [Régularité de f par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .

(iii) [Régularité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .

(iv) [Domination locale] Pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Démonstration : La preuve est semblable à celle de la proposition 1.0.2, car la dérivabilité et la continuité sont des propriétés locales.

Exemple 2.0.2 1. Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

3. En déduire qu'il existe C dans \mathbb{R} tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = C - \text{Arctan}(x)$.

4. En déterminant $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, en déduire l'expression de F sur \mathbb{R}_+^* .

Remarque 2.0.1 Ainsi dériver $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ permet d'avoir parfois une expression simple de F' ou d'avoir une équation différentielle vérifiée par F , ce qui nous permet d'avoir F .

Corollaire 2.0.1 ($x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ de classe \mathcal{C}^k) Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que

(i) [Caractère \mathcal{C}^k en le paramètre] Pour tout t dans J , $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

(ii) [Régularité des dérivées $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout j dans $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et pour tout x dans I , $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .

(iii) [Régularité des dérivées $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout x dans I , $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ_k continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t).$$

(iv bis) [Domination locale] Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , il existe une fonction φ_k continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t).$$

Alors, $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in I, g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt.$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur k dans le cas (iv) bis avec la domination locale. Pour $k = 1$, c'est la proposition 2.0.2.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la proposition pour k et on se donne f vérifiant les propriétés de l'énoncé pour $k + 1$.

Montrons d'abord que g est de classe \mathcal{C}^k . Il ne reste que l'hypothèse de domination locale à vérifier. Soient $[a, b]$ un segment inclus dans I et φ_{k+1} à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que que :

$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| \leq \varphi_{k+1}(t)$. Pour tout (x, t) de $[a, b] \times J$, on a :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) + \int_a^x \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) dx. \text{ Ainsi : } \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \int_a^x \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| dx \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \int_a^b \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| dx \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \int_a^b \varphi_{k+1}(t) dx = \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + (b - a)\varphi_{k+1}(t). \text{ On}$$

pose $\varphi_k : t \mapsto \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + (b - a)\varphi_{k+1}(t)$ et par hypothèses cette fonction est continue par morceaux et intégrable sur J . Ainsi grâce à l'hypothèse de récurrence au rang k , on a : g de classe \mathcal{C}^k et $g^{(k)} = h = x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$. Montrons que h est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

- Pour x fixé dans I , la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Pour t fixé dans J , la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

- Pour x fixé dans I , la fonction $t \mapsto \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Il existe une fonction φ_{k+1} intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| \leq \varphi_{k+1}(t)$.

La proposition 2.0.2, nous permet de dire que $h : x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et :

$$\forall x \in I, g^{(k+1)}(x) = h'(x) = \int_J \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) dt.$$

Nous avons démontré la proposition au rang $k + 1$, ce qui achève la récurrence.

Pour montrer la proposition avec l'hypothèse (iv), comme celle-ci implique l'hypothèse de domination locale, on a le résultat.

Corollaire 2.0.2 ($x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ de classe \mathcal{C}^∞) Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que

- [Caractère \mathcal{C}^∞ en le paramètre] Pour tout t dans J , $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
- [Régularité des dérivées $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout j dans \mathbb{N} et pour tout x dans I , $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- [Domination] Pour tout j de \mathbb{N} , existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq \varphi_j(t).$$

OU

- bis [Domination locale] Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , pour tout j de \mathbb{N} , existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq \varphi_j(t).$$

Dans ce cas g est de classe \mathcal{C}^∞ sur I et : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I, g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$.

Remarque 2.0.2 1. La domination locale s'utilise souvent lorsque I est un intervalle ouvert ou non borné.

- Dans le corollaire précédent, on peut avoir la domination qu'à partir d'un certain rang k , mais il faut montrer alors que les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ sont intégrables sur J pour $j < k$.

Exemple 2.0.3 1. Pour x dans \mathbb{R}_+ , on pose $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ et donner ses dérivées successives. Est-ce que S est DSE au voisinage de 0 ?

2. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de F .

(b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .

(c) Montrer que F est l'unique solution sur \mathbb{R}_+^* de $y'' + y = 1/x$ admettant une limite en $+\infty$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

3 Compléments : thèmes d'étude

3.1 Fonction Gamma

On pose : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On rappelle $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. **(CCP 29)** Montrer que Γ est définie sur \mathbb{R}_+^* .
2. **(CCP 29 pour \mathcal{C}^1)** Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et exprimer $\Gamma^{(j)}(x)$ sous forme d'intégrale, pour $j \in \mathbb{N}$.
3. **(CCP 29)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
4. En déduire :
 - (a) $\Gamma(n)$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

- (b) un équivalent de Γ en 0^+ .
- 5. Étudier les variations de Γ .
- 6. Déterminer $\lim_{+\infty} \Gamma$.
- 7. Montrer que Γ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .
- 8. Déterminer $\Gamma(1/2)$.

3.2 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(xt) dt = 0$.

Ce résultat est encore valable pour g continue par morceaux sur $[a, b]$.

- Commençons par montrer le résultat pour g constante : $\forall d \in \mathbb{R}, \int_a^b d \sin(xt) dt = \frac{d \cos(xa) - d \cos(xb)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- Montrons maintenant le résultat pour une fonction en escalier. Soit $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à g et on note $d_i = g|_{c_i, c_{i+1}[}$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On a donc : $\int_a^b g(t) \sin(xt) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} d_i \sin(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, car $\int_{c_i}^{c_{i+1}} d_i \sin(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, grâce au premier point, pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- Maintenant pour g continue par morceaux. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$, il existe ψ une fonction en escalier telle que $\|g - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$. On a donc :

$$\left| \int_a^b (g(t) - \psi(t)) \sin(xt) dt \right| \leq \int_a^b |g(t) - \psi(t)| |\sin(xt)| dt \leq \int_a^b \|g - \psi\|_\infty \leq (b-a)\varepsilon.$$

On a grâce au deuxième point : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi(t) \sin(xt) dt = 0$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in [A, +\infty[$, $\left| \int_a^b \psi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \varepsilon$.

Ainsi pour $x \geq A$, on a $\left| \int_a^b g(t) \sin(xt) dt \right| = \left| \int_a^b (g(t) - \psi(t)) \sin(xt) dt + \int_a^b \psi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \left| \int_a^b (g(t) - \psi(t)) \sin(xt) dt \right| + \left| \int_a^b \psi(t) \sin(xt) dt \right| \leq (b-a+1)\varepsilon$.

On a donc : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow \left| \int_a^b g(t) \sin(xt) dt \right| \leq (b-a+1)\varepsilon$, d'où le résultat.

3.3 Produit de convolution

Soient f une fonction continue, à valeurs réelles et intégrable sur \mathbb{R} et g une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , à valeurs réelles telle que pour tout k de \mathbb{N} , la fonction $g^{(k)}$ soit bornée sur \mathbb{R} .

On note $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ et bornées sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$.

1. Montrer que $f * g$ est définie sur \mathbb{R} et que : $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = (g * f)(x)$.
3. Montrer que $f * g$ est de classe \mathcal{C}^∞ et exprimer ses dérivées successives.
4. Montrer que si $\lim_{+\infty} g = 0$, alors $\lim_{+\infty} f * g = 0$.
5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions \mathcal{C}^∞ dont toutes les dérivées sont bornées. Montrer que l'application $T : g \mapsto f * g$ est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
6. Montrer que si f et g sont nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$, alors $f * g$ est nulle en dehors d'un segment $[-B, B]$.
7. Si on suppose maintenant f et g que continues et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que $f * g$ est définie sur

\mathbb{R} et montrer que $\|f * g\|_\infty \leq \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$, avec pour rappel : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt}$.