1 Rappels de sup sur les espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 (Symétrie, bilinéarité, positivité, séparation) *Soit φ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que φ est **symétrique** lorsque : $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.*
2. *On dit que φ est **bilinéaire** lorsque pour tout u, v dans E, les applications $\varphi(\cdot, v) : u \mapsto \varphi(u,v)$ et $\varphi(u,\cdot) : v \mapsto \varphi(u,v)$ sont linéaires. Ce ceci est équivalent à pour tout $x, y, z \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \mu\varphi(y,z)$ et $\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(x,z)$.*
3. *On dit que φ est **positive** si : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) \geq 0$.*
4. *On dit que φ est **définie positive** si φ est positive et de plus : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0$ (φ « sépare » les vecteurs).*

Définition 1.1.2 (Produit scalaire) *On dit que φ est un produit scalaire lorsqu'elle vérifie les quatre points de la définition précédente. La produit scalaire se note aussi : $(u,v) \mapsto (u|v)$ ou $(u,v) \mapsto \langle u|v \rangle$ ou $(u,v) \mapsto u \cdot v$.*

Remarque 1.1.1 *Si φ est un produit scalaire alors :*

1. *On a : $\forall u \in E, \varphi(0,u) = \varphi(u,0) = 0$. Ainsi $\varphi(u,u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.*
2. *Si on montre que φ est symétrique, pour la bilinéarité il suffit de montrer que $\varphi(\cdot, v)$ ou $\varphi(u,\cdot)$ est linéaire.*

Définition 1.1.3 (Espace euclidien, espace préhilbertien) *Si φ est un produit scalaire, on dit que E muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien. De plus, si E est de dimension finie, alors E est un espace euclidien.*

Rappelons les produits scalaires usuels sur certains espaces :

1. $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$, on pose $\varphi(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

   Remarque 1.1.2 *(a) $\mathbb{R}^n$ muni de ce produit scalaire, appelé produit scalaire usuel, est un espace euclidien*

   (b) Pour $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve le produit scalaire usuel. Cependant on aurait pu définir un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ qui est $((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + 5yy'$.

2. En identifiant les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: $X^T Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

   Après identification, on retrouve le même produit scalaire que sur $\mathbb{R}^n$ et donc on définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, défini par $(X,Y) \mapsto X^T Y$.
   On remarque donc que pour tout matrice colonne X, on a : $X^T X = 0 \Leftrightarrow X = 0$, car : $(X|X) = 0$ et on utilise la propriété de séparation du produit scalaire.

3. ***(CCP 92)*** Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\varphi(A, B) = tr(A^T B)$. C'est un produit scalaire car :
   - Symétrie : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(B^T A) =$
   - Bilinéarité : $*$ linéaire à gauche : $\forall A, B, C, \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ tr((\lambda A + \mu C)^T B) =$
     $*$ On a la linéarité à droite par
   - Positivité : $\forall A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(A^T A) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$ (voir chapitre 4).
   - Séparation : $tr(A^T A) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = 0 \Rightarrow A = 0$, car dans la somme précédente, tous les termes sont nuls.

   On a aussi $tr(A^T B) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} b_{ij}$, car le coefficient d'indice (j, j) de $A^T B$ est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$.

4. On note $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Pour f et g dans $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_I fg$. Ainsi $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, muni de $(|)$ est un espace préhilbertien (voir le chapitre 1).

5. ***(CCP 39)*** On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ converge. Cet espace est l'analogue pour les suites de l'espace précédent $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$. Les démonstrations suivantes sont très proches de celles pour $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$.
   (a) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. La série $\sum x_n y_n$ converge :

   (b) ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles :
      - le suite nulle est dans ℓ^2 (car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 0^2 = 0$) ;
      - pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + 2\lambda x_n y_n + \lambda^2 y_n^2$. Par hypothèse $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et le point précédent nous donne la convergence de $\sum x_n y_n$, donc $\sum (x_n + \lambda y_n)^2$ converge donc, $(x_n + \lambda y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans ℓ^2.

   ℓ^2 est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire (à montrer) : $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

1.1.2 Normes

Définition 1.1.4 (Norme euclidienne) *Pour x dans E, on note $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ que l'on appelle norme euclidienne de x.*
On dit que x est unitaire ou normé quand : $\|x\| = 1$.

Exemple 1.1.1 *On rappelle le résultat vu au chapitre 1 : que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et vaut $n!$(on effectue des intégrations par partie).*

1. *Montrer que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t) e^{-t} dt$ a un sens.*
2. *On pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt}$. Montrer que $\|.\|$ est une norme euclidienne.*
3. *On reprend le produit scalaire associé à la norme précédente. Calculer $\|X^p\|$ pour tout p de $\mathbb{N}$.*

Proposition 1.1.1 (Séparation et homogénéité de la norme) *Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$.

Proposition 1.1.2 (Développement d'une norme) *Soient $x, y, x_1, ..., x_n = \in E^2$. On a :*

1. $\|x+y\|^2 =$
2. $\|x-y\|^2 =$
3. $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$ *(identité de polarisation)*
4. $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i | \sum_{i=1}^{n} x_i\right) =$

1.1.3 Vecteurs orthogonaux

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 1.1.5 (Vecteurs orthogonaux) *Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si : $(x|y) = 0$.*

Exemple 1.1.2 *Soient $a, b \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que : $\|a+b\| = \|a-b\| \Leftrightarrow (a|b) = 0$.*
2. *Montrer que $\|a\| = \|b\| \Leftrightarrow (a+b|a-b) = 0$.*
3. *En déduire l'équivalence entre les deux propositions suivante :*
   (a) *f conserve la norme ($\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|f(x)\| = \|f(y)\|$).*
   (b) *f conserve l'orthogonalité ($x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$).*
4. *En déduire que si f conserve l'orthogonalité, alors : $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.*

Théorème 1.1.1 (Théorème de Pythagore) *Soit $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$.*

Définition 1.1.6 (Famille de vecteurs orthogonales et orthonormales) *Une famille de vecteurs* $(x_i)_{i\in I}$ *est :*

1. *orthogonale si :* $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) = 0.$
2. *orthonormale si :* $\forall (i,j) \in I^2,\ (x_i|x_j) = \delta_{ij} \quad (\|x_i\| = 1$ *et* $(x_i|x_j) = 0$ *si* $i \neq j)$.

Exemple 1.1.3

1. *La base canonique* $(e_1, ..., e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$ *pour le produit scalaire usuel.*
2. *La base canonique* $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *est une base orthonormée de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire* $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$.
3. *Sur* $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ *on définit le produit scalaire* $(f|g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} fg.$
Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, *on pose les fonctions* $f_n : x \mapsto \sin(nx)$ *et* $g_m : x \mapsto \cos(mx)$. *La famille* $(f_n, g_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ *est . Déterminer la norme des vecteurs de cette famille.*

4. *Soit* E *un espace vectoriel préhilbertien, et* $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ *une famille de vecteurs de* E *telle que :* $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2.$
Montrer que $\mathcal{E}$ *est une famille orthonormée de* E *si :* $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \|e_i\| \geq 1.$

Proposition 1.1.3 *Une famille finie orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.*

Remarque 1.1.3 *IMPORTANTE :*

1. *Dans un espace euclidien de dimension n, une famille orthogonale constituée de n vecteurs non nuls est une base de E, car c'est une famille libre ayant $n = \dim(E)$ éléments.*
2. *Toute famille orthonormale est libre, car elle est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls.*

Proposition 1.1.4 (Théorème de Pythagore généralisé) *Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille orthogonale. Alors on a :* $\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$.

1.1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) ***(CCP 76 Énoncé+démo)*** *Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. Alors on a :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (x|y)^2 \leq \|x\|^2 \times \|y\|^2 \ \ \text{soit : } \forall (x, y) \in E^2,\ |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

De plus on a : $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration : Soit $(x, y) \in E^2$ et on pose : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$. On remarque que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geq 0$.
De plus par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :
$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda (x|y) + \|x\|^2$.
Premier cas : $y = 0$
Alors : $(x|y) = 0$ et $\|y\|^2 = 0$, donc l'inégalité est vérifiée (on a égalité).
Deuxième cas : $y \neq 0$
On a alors $\|y\|^2 \neq 0$ et donc P est un trinôme du second degré toujours positif, donc son discriminant Δ est négatif ou nul. Or $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$, donc : $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \times \|y\|^2$ soit : $\forall (x, y) \in E^2,\ |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$.

Traitons maintenant le cas d'égalité.
Supposons que $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\|$.
• Si $y = 0$, alors x et y sont colinéaires.
• Si $y \neq 0$, alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0, soit $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(.|.)$ est un produit scalaire, alors la séparation donne $x + \lambda_0 y = 0$, donc x et y sont colinéaires.
Supposons que x et y soient colinéaires.
Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$. Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (le raisonnement est similaire pour l'autre cas). On a : $|(x, y)| = |\alpha|.|(y|y)| = |\alpha|.\|y\|^2$ et
$\|x\| \times \|y\| = \|\alpha y\| \times \|y\| = |\alpha| \times \|y\| \times \|y\| = |(x|y)|$.

Exemple 1.1.4
1. *Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :*
2. *Pour f et g dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a :*
3. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose $g : t \mapsto tf(t)$. On suppose que f' et g sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
   (a) *Montrer que : $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
   (b) *Soit $A > 0$. Montrer que $\int_0^A f^2(t)dt = Af(A)^2 - 2\int_0^A g(t)f'(t)dt$.*
   (c) *En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} tf^2(t)$ existe et est réelle. Montrer ensuite que celle-ci est nulle. De même, on montrerait que : $\lim\limits_{t \to -\infty} tf^2(t) = 0$.*
   (d) *Montrer que : $\int_{\mathbb{R}} f^2 \leq 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}} (f')^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} g^2}$. Étudier le cas d'égalité.*

Corollaire 1.1.1 (Norme euclidienne) *Une norme découlant d'un produit scalaire vérifie les propriétés des normes : positivité, séparation, homogénéité et inégalité triangulaire.*

Exemple 1.1.5 *1. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.*
Est-ce que la norme $\|.\|_\infty$ découle d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$?

2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^T A)$.

Corollaire 1.1.2 (Inégalités triangulaires) *Soit $(x, y) \in E^2$.*

1. *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski ou triangulaire).*
   On a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
2. *$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.*

1.2 Bases orthonormales dans un espace euclidien

$(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien de dimension n avec n dans $\mathbb{N}^*$.

1.2.1 Existence de bases et expression du produit scalaire

Théorème 1.2.1 (Existence d'une base orthonormée) *Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.*

Théorème 1.2.2 (théorème de la base orthonormée incomplète) *Toute famille orthonormée de E peut se compléter en une base orthonormée de E.*

Proposition 1.2.1 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)
$\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$, où $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ sont dans $\mathbb{R}$. On a :

1. *$(x|y) =$* 　　　　　　 2. *On a $\|x\| =$*
3. *$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k =$* 　　　　 *et donc $x =$*
4. *Pour $X = Mat_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = Mat_{\mathcal{U}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: $(x|y) =$* 　　　　 *$\|x\| =$*

Remarque 1.2.1 *IMPORTANTE : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de E. Soit $A = Mat_{\mathcal{U}}(f) = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$. On a alors $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ij} =$*

En particulier $tr(f) =$

Exemple 1.2.1 (Déterminant de Gram) *$x_1, ..., x_p$ sont p vecteurs de E et on pose la matrice $G(x_1, ..., x_p) = [(x_i|x_j)]_{1\leq i,j\leq p}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.*

1. *Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p) = [a_{ij}]_{\substack{\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$. Montrer que $G(x_1, ..., x_p) = A^T A$.*
2. *Montrer que $\operatorname{rg}(G(x_1, ..., x_p)) = \operatorname{rg}(x_1, ..., x_p)$.*

1.3 Orthogonalité

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 1.3.1 (Orthogonalité) *1. Soit $x \in E$. L'ensemble $\{y \in E, (x|y) = 0\}$ est appelé l'orthogonal de x et il est noté $x^{\perp}$.*

2. Soit $X \subset E$ une partie de E non vide. L'ensemble $\{y \in E / \forall x \in X,\ (x|y) = 0\} = \bigcap_{x \in X} x^{\perp}$ est appelé orthogonal de X et il est noté $X^{\perp}$.

Exemple 1.3.1 *1.* $\{0\}^{\perp} =$ *2.* $E^{\perp} =$

Remarque 1.3.1 *1. Si on a : $\forall (x, y) \in F \times G,\ (x|y) = 0$, on n'a pas forcément $G = F^{\perp}$. On a seulement :*

2. (IMPORTANT) Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ une partie finie de E. On a : $X^{\perp} = \{x_1, ..., x_n\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)^{\perp} = \mathrm{Vect}(X)^{\perp}$, cela signifie que : $x \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ (x|x_i) = 0$.

3. $x^{\perp} = (\mathbb{R}x)^{\perp} = \mathrm{Vect}(x)^{\perp}$.

Proposition 1.3.1 (L'orthogonal est un sous-espace vectoriel) *Soit $X \subset E$ une partie non vide de E. Alors $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.3.2 (Orthogonalité et somme directe) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors on a : $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Ainsi la somme $F + F^{\perp}$ est directe.*

Exemple 1.3.2 *Soit $F_1, ..., F_p$ une famille de sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Montrer que : $F_1 + F_2 + ... + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$.*

Définition 1.3.2 (Supplémentaire orthogonal) *Si on a $F \oplus F^{\perp} = E$, on dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E.*

Remarque 1.3.2 *ATTENTION, en dimension infinie, F et $F^{\perp}$ ne sont pas toujours supplémentaires.*

Exemple 1.3.3 *1. **(CCP 77)** Soit E un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que : $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.*

*2. **(CCP 92)** Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^{\perp}$ pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

3. *Soit* $E = \mathscr{C}^2([0;1],\mathbb{R})$ *et pour* $f, g \in E$, *on pose :*
$(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)dt$. *On considère les sous-espaces* $V = \{f \in E \ / \ f'' = f\}$ *et* $W = \{f \in E \ / \ f(0) = f(1) = 0\}$. *On admet que* $(.|.)$ *est un produit scalaire sur* E.
   (a) *Soient* $f \in V$ *et* $g \in E$. *Montrer que* $(f,g) = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$.
   (b) *Déterminer une base orthonormée de* V.
   (c) *Montrer que :* $V^\perp = W$.

Proposition 1.3.3 (Orthogonal en dimension finie) *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* *dimension finie* *de* E. *Alors* $F \oplus F^\perp = E$.

Corollaire 1.3.1 (Expression de la décomposition suivant $F \oplus F^\perp = E$) 1. *Soit* $x \in E$ *et* $(f_1, ..., f_p)$ *une base orthonormale de* F. *La décomposition suivant* $F \oplus F^\perp$ *est donnée par :*

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p}(x|f_i)f_i}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^{p}(x|f_i)f_i}_{\in F^\perp}.$$

2. *Si* E *est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E, *on a :*
   - $F \oplus F^\perp = E$.
   - $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$

   En effet F *est de dimension finie en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.*

Exemple 1.3.4 1. ***(CCP 92)*** *Dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, muni du produit scalaire* $(M,N) \mapsto tr(M^T N)$*, déterminer* $(A_n(\mathbb{R}))^\perp$*.*

2. ***(CCP 77)*** *Soient* E *un espace euclidien et* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*.*
   (a) *Montrer que :* $(F^\perp)^\perp = F$ *(si* E *est de dimension infinie, on a seulement* $F \subset (F^\perp)^\perp$*).*
   (b) *Montrer que :* $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$*.*

   (a) *On a :* $F \subset (F^\perp)^\perp$*, car pour* x *dans* F*, on a :* $\forall y \in F^\perp,\ (x|y) = 0$*, donc* x *est dans* $(F^\perp)^\perp$*.*
   De plus $\dim\left(\left(F^\perp\right)^\perp\right) = n - \dim\left(F^\perp\right) = \dim(F)$*.*

   (b)

3. *Soit* E *un espace vectoriel préhilbertien, et* $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ *une famille de vecteurs unitaires de* E *telle que :* $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$*. Montrer que* $\mathcal{E}$ *engendre* E*.*

4. ***(CCP 39)*** *Attention* $(F^\perp)^\perp = F$ *n'est pas toujours vraie. On reprend l'espace* ℓ^2 *(les suites* $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telles que* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x_n^2$ *converge) muni du produit scalaire*
   $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$*, pour* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$*.*
   Soit F *l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini. Déterminer* $F^\perp$*, puis comparer* F *et* $(F^\perp)^\perp$*.*

1.4 Projections orthogonales

1.4.1 Projecteurs orthogonaux

$(E, (\cdot,\cdot))$ désigne un espace préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On a donc : $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 1.4.1 (Projection orthogonale) *On appelle projection orthogonale sur* F *la projection sur* F *parallèlement à* $F^\perp$*. On la note* p_F *et pour* $x = y + z$ *avec* y *dans* F *et* z *dans* $F^\perp$*, on a* $p_F(x) = y$*.*

Remarque 1.4.1 *On a :* $\forall x \in E,\ x - p_F(x) \in$

Exemple 1.4.1 1. *Donner l'expression de la projection orthogonale* p *sur* $A_n(\mathbb{R})$.

2. ***(CCP 80)*** *Soit* E *l'espace de fonctions continues* 2π*-périodiques muni du produit scalaire* $(u|v) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx$*, avec* u, v *dans* E*. On a vu dans le chapitre 1 que cela définit un produit scalaire.*
Soient $f : x \mapsto \cos(x)$*,* $g : x \mapsto \cos(2x)$ *et* $h : x \mapsto \sin^2(x)$ *et on pose* $F = vect(f, g)$*.*
Déterminer le projeté orthogonal de h *sur* F*.*

Définition 1.4.2 (Projecteur orthogonal) *Un endomorphisme* p *de* E *est dit projecteur orthogonal lorsqu'il coïncide avec une projection orthogonale. Autrement dit, on a :*

- $p^2 = p$.
- $\mathrm{Ker}\,(p) = (\mathrm{Im}\,(p))^\perp$.

Proposition 1.4.1 (Formule de la projection orthogonale) *Soit* $(f_1, ..., f_p)$ *une base orthonormée de* F*. Alors on a :*
$\forall x \in E,\ p_F(x) =$ *et* $\|p_F(x)\|^2 =$

Remarque 1.4.2 *(IMPORTANTE) Pour obtenir la projection orthogonale d'un vecteur* x *sur* F*, on a deux méthodes :*

- *on dispose d'une base orthonormée* $(f_1, ..., f_p)$ *de* F *(éventuellement obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) et dans ce cas, on peut utiliser directement la formule :* $p_F(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (x|f_j) f_j$.
- *on dispose d'une base* $(e_1, ..., e_p)$ *de* F *qui n'est pas forcément orthonormée. On cherche la projection orthogonale de* x *sur* F *sous la forme* $p_F(x) = y = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$ *(qui est dans* F*). On doit donc avoir* $x - y$ *dans* $F^\perp = (\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p))^\perp$ *ce qui revient à avoir :* $\forall i \in [\![1, p]\!],\ (x - y|e_i) = 0$*,*
soit le système : $\left\{\begin{array}{c} (x|e_1) - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (e_j|e_1) = 0 \\ \vdots \\ (x|e_p) - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (e_j|e_p) = 0 \end{array}\right.$*, où l'on doit déterminer les* λ_j*.*

Exemple 1.4.2 1. *Soit* $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de norme un. On pose* $A = CC^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que l'endomorphisme* p *canoniquement associé à* A *est une projection orthogonale sur un espace que l'on précisera.*

2. *On reprend l'exemple 1.1.1* $E = \mathbb{R}[X]$ *muni du produit scalaire* $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. *Déterminer la projection orthogonale de* X^3 *sur* $\mathbb{R}_2[X]$. *On rappelle que :* $\forall p, q \in \mathbb{N},\ (X^p|X^q) = (p+q)!$.

3. *On généralise ce qui a été vu dans l'exemple 1.4.1. Soit* $\mathcal{C}_{2\pi}$ *l'espace de fonctions continues* 2π*-périodiques du produit scalaire* $(u|v) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx$, *avec* u, v *dans* $\mathcal{C}_{2\pi}$. *Pour* (m, n) *dans* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, *on pose les fonctions* $f_n : x \mapsto \sin(nx)$ *et* $g_m : x \mapsto \cos(mx)$. *Soit* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. *Quelle est la projection orthogonale* $p_{F_N}(f)$ *de* f *sur* $F_N = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_N, g_0, g_1, ..., g_N)$ *avec* N *dans* $\mathbb{N}^*$ *? Cette projection est s'appelle décomposition en série de Fourier.*

1.4.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Théorème 1.4.1 (Procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt) *Soit* $(e_1, ..., e_n)$ *une famille libre de* E. *Alors il existe une famille orthonormale* $(u_1, ..., u_n)$ *telle que :*

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

Rappel de la méthode : On procède par récurrence, en construisant d'abord, u_1, puis u_2,..., jusqu'à u_n.

- On pose $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

- À partir de e_2, on doit construire u_2 qui doit être orthogonal à u_1 et de norme 1. Ainsi on enlève d'abord la projection orthogonale de e_2 sur u_1. On pose donc $v_2 = e_2 - (e_2|u_1)u_1$. Ainsi on a bien $(v_2|u_1) = 0$. Ensuite il faut normaliser v_2 et on pose $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$.

- Supposons que l'on ait construit $(u_1, ..., u_p)$. À partir de e_{p+1}, nous devons construire u_{p+1} qui doit être orthogonal à $u_1, ..., u_p$ et de norme 1. On commence donc par retrancher à e_{p+1}, sa projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$. Ainsi on pose : $v_{p+1} = e_{p+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(e_{p+1}|u_i)u_i$. Ainsi on a bien : $\forall j \in [\![1, p]\!],\ (v_{p+1}|u_j) = 0$. Il reste maintenant à normaliser v_{p+1} et on pose $u_{p+1} = \dfrac{v_{p+1}}{\|v_{p+1}\|}$. Et on continue ainsi de suite jusqu'à u_n.

Exemple 1.4.3

1. *On reprend l'exemple 1.1.1 avec $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X],\ \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire. On rappelle que : $\forall p, q \in \mathbb{N},\ (X^p|X^q) = (p+q)!$.*

2. *Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur le plan vectoriel (P) d'équation : $\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z-t & = & 0 \\ x+3y+z-t & = & 0 \end{array}\right.$.*

1.4.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Ici, F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^{\perp} = E$ (les espaces ne sont pas forcément de dimension finie).

Définition 1.4.3 (Distance à un sous-espace vectoriel) *Soit $x \in E$. On pose $d(x,F) = \inf\{\|x-f\|,\ f \in F\}$. On appelle ceci distance de x à F.*

Proposition 1.4.2 (Projection orthogonale et distance) *Soit $x \in E$. Alors on a :*
$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.
L'unique vecteur y_0 de F vérifiant $\|x - y_0\| = d(x,F)$ est : $p_F(x)$.

Remarque 1.4.3

1. *(IMPORTANTE) Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, alors : $d(x,F) = \|z\|$, car on a : $y = p_F(x)$. Ainsi si on connaît z, on peut calculer directement $d(x,F) = \|z\|$.*
2. *On a : $\forall x \in E, \forall t \in F,\ \|x - p_F(x)\| = d(x,F) \leq \|x - t\|$.*

Exemple 1.4.4 *Déterminer la distance de $u = (1,1,1,-1)$ au plan (P) d'équation :*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z-t & = & 0 \\ x+3y+z-t & = & 0 \end{array} \right. .$$

Remarque 1.4.4 *IMPORTANT : voici une méthode pour calculer une distance. Nous avons besoin de déterminer $p_F(x)$, avec F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Nous avons déjà vu comment calculer $p_F(x)$.*
Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormée de F (éventuellement construite par le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt). Nous avons : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (x|f_j) f_j$. De plus $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ qui est

la décomposition suivant $F \oplus F^{\perp}$. *Ainsi grâce au théorème de Pythagore :*
$d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{p} (x|f_j)^2$, *car la base* $(f_1, ..., f_p)$ *est orthonormée.*
Alors on a :

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{p} (x|f_j)^2}.$$

Exemple 1.4.5 1. *Déterminer* $d = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

2. *Soit* E *un espace préhilbertien et* F *un sous-espace vectoriel admettant* $(e_1, ..., e_n)$ *comme base.*
Pour $x_1, ..., x_p$ *dans* E, *on pose* $G(x_1, ..., x_p) = [(x_i|x_j)]_{1 \leq i,j \leq p}$ *et on pose* $\Gamma(x_1, ..., x_p) = \det(G(x_1, ..., x_p))$.
Soit $x \in E$.
   (a) *Si* x *est dans* $F^{\perp}$, *exprimer* $\Gamma(e_1, ..., e_n, x)$ *à l'aide de* x *et de* $\Gamma(e_1, ..., e_n)$.
   (b) *On revient au cas général pour* x. *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $i \in [\![1, n]\!]$.
   Montrer que $\Gamma(e_1, ..., e_n, x + \lambda e_i) = \Gamma(e_1, ..., e_n, x)$.
   (c) *Montrer que :* $d^2(x,F) = \dfrac{\Gamma(e_1, ..., e_n, x)}{\Gamma(e_1, ..., e_n)}$.

1.4.4 Symétrie orthogonale (programme de spé)

Définition 1.4.4 (Symétrie orthogonale) *On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie sur F parallèlement à $F^{\perp}$. On la note s_F et pour $x = x' + x''$ avec x' dans F et x'' dans $F^{\perp}$, on a : $s_F(x) = x' - x''$.*

Remarque 1.4.5 $s_F =$

Définition 1.4.5 (Caractérisation des symétrie orthogonales) *Une symétrie s de E ($s^2 = id_E$) est dite orthogonale lorsqu'elle coïncide avec une symétrie orthogonale. Autrement dit, on a :*

- $s^2 = id_E$
- $\mathrm{Ker}\,(s + id_E)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(s - id_E)$, *soit* $\{x \in E,\ s(x) = -x\}^{\perp} = \{x \in E,\ s(x) = x\}$.

Exemple 1.4.6 *Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ l'expression de la symétrie orthogonale s par rapport au plan vectoriel (P) d'équation :* $\left\{\begin{array}{lcl} x + y - z - t & = & 0 \\ x + 3y + z - t & = & 0 \end{array}\right.$.

1.5 Applications aux hyperplans et aux formes linéaires

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension n.

1.5.1 Description des formes linéaires et hyperplans dans un espace euclidien

Théorème 1.5.1 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit f une forme linéaire de E. Alors il existe un unique a dans E tel que : $\forall x \in E,\ f(x) = (x|a) = (a|x)$. On note $f = (\cdot|a) = (a|\cdot)$.*

Démonstration :

Remarque 1.5.1 *1. À l'aide de ce théorème on peut définir le produit vectoriel. Soit* $\mathcal{B} = (i, j, k)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Pour* u *et* v *dans* E*, il existe un unique vecteur* w *de* E *tel que :* $\forall a \in E,\ \det_{\mathcal{B}}(u, v, a) = (a|w)$*, car : l'application* $a \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v, a)$ *est une forme linéaire.*
Cet unique vecteur est appelé produit vectoriel de u *et* v *est on le note* $u \wedge v$*. Vérifions que ceci coïncide avec le produit vectoriel que vous avez vu en physique ou SI : on note* $u = (u_1, u_2, u_3)$*,* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *et* $a = (a_1, a_2, a_3)$*. On a en développant par rapport à la dernière colonne :*

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, a) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & a_1 \\ u_2 & v_2 & a_2 \\ u_3 & v_3 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},$$ *ainsi* $$w = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$ *ce qui correspond aux coordonnées que vous connaissez sur le produit vectoriel.*
Si u *et* v *sont orthogonaux, alors* $(u, v, u \wedge v)$ *est une base orthonormée directe de* $\mathbb{R}^3$*.*
Cette définition du produit vectoriel s'étend à un espace euclidien de dimension n*.*

2. Le théorème de Riesz n'est plus vrai en dimension infinie. Donnons deux exemples.

(a) On reprend l'espace ℓ^2 *muni du produit scalaire* $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$*, pour* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$*. Soit* $p \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$*, on pose* $\varphi(x) = x_p$*.*
- ***(CCP 39)*** *Montrer que* φ *est une forme linéaire et continue de* ℓ^2 *dans* $\mathbb{R}$*.*
- *Montrer qu'il existe* $a \in \ell^2$ *tel que :* $\forall x \in \ell^2,\ \varphi(x) = (a|x)$*.*

(b) On se place dans $\mathbb{R}[X]$ *muni du produit scalaire :* $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = \int_0^1 PQ$*. Soit la forme linéaire* $\psi : P \mapsto P(0)$*.*
Montrer qu'il n'existe pas $A \in \mathbb{R}[X]$ *telle que :* $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \psi(P) = (A|P)$*.*

Corollaire 1.5.1 (Description des hyperplans dans un espace euclidien) *Soit* H *un hyperplan de* E*. Il existe* a *dans* E *non nul tel que :* $H = \{x \in E,\ (a|x) = 0\} = a^{\perp}$*.*
Un tel vecteur a *est appelé vecteur normal à l'hyperplan* H*.*

Démonstration : Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. La proposition précédente nous dit qu'il existe $a \in E$ tel que $f = (a|\cdot)$. De plus a est non nul, car φ n'est pas nulle, donc $H = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0\} = \{x \in E,\ (a|x) = 0\}$.

Exemple 1.5.1 *Si* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $H = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$ *avec* $a_1, ..., a_n$ *des réels non tous nuls. Alors* $H =$
Par exemple si on se rappelle du lycée, dans l'espace si H *est le plan d'équation* $2x - y + 3z = 0$, *alors un vecteur normal de ce plan est*

1.5.2 Projection orthogonale et réflexion par rapport à un hyperplan

Proposition 1.5.1 (Projection orthogonale sur un hyperplan) *Soit* $H = a^\perp = (\mathrm{Vect}(a))^\perp$, *un hyperplan, avec* $a \in E$ *non nul. L'expression de la projection orthogonale sur* H *est :* $x \mapsto$

Remarque 1.5.2 *La projection sur* $\mathrm{Vect}(a)$ *est* $x \mapsto (x|u)u$, *avec* $u = \dfrac{a}{\|a\|}$ *qui est unitaire.*

Exemple 1.5.2 *On munit* $\mathbb{R}^n$ *du produit scalaire usuel. Soit* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *et* $H = a^\perp = (\mathrm{Vect}(a))^\perp$. *Quelle est la matrice la projection orthogonale sur* H *dans la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *?*

Proposition 1.5.2 (Distance à un hyperplan) *Soit* $a \in E \setminus \{0\}$ *et* $H = a^\perp$ *un hyperplan de* E. *Soit* $x \in E$. *On a :* $d(x, H) =$

Exemple 1.5.3 *On munit* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *du produit scalaire usuel :* $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (A|B) = tr(A^T B)$. *Soient* $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M) = 0\}$ *et* J *la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avec que des 1. Déterminer* $d(J, H)$.

1.5.3 Réflexions (programme de spé)

Définition 1.5.1 (Réflexion) *Soit* $s \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que* s *est une réflexion lorsque* s *est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan* H.

Proposition 1.5.3 (Expression d'une réflexion) *Soit* $a \in E \setminus \{0\}$. *La réflexion par rapport à* $H = a^\perp$ *est :* $s_H : x \mapsto x - 2\dfrac{(x|a)}{\|a\|^2}a$.

Remarque 1.5.3

1. *On a* $E_1(s_H) =$ *et* $E_{-1}(s_H) =$
2. *Si* E *est un espace euclidien et* $(e_1, ..., e_{n-1})$ *est une base orthonormée de* $H = a^\perp$ $(a \neq 0)$, *alors* $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_{n-1}, \dfrac{a}{\|a\|}\right)$ *est une base orthonormée de* E *et* $Mat_{\mathcal{B}}(s_H) =$

   Ainsi $\det(s_H) =$

Exemple 1.5.4 *Soit* $a, b \in E$ *unitaires tels que* $a \neq b$. *Montrer qu'il existe une unique réflexion* σ *telle que* $\sigma(a) = b$.

1.6 Complément : Polynômes orthogonaux

Dans ce paragraphe, nous allons présenter des familles orthonormées totales constituées de polynômes. Celles-ci sont très utilisées pour effectuer des approximations de fonctions continues par des polynômes (qui sont plus simples à étudier). D'autre part le fait d'avoir des familles orthonormales permet d'avoir des formules simples pour les projections et donc d'obtenir rapidement des polynômes qui approchent des fonctions continues.

Certains résultats de ce paragraphe sont présentés sous forme de TD, car il n'y a pas de connaissances spécifiques sur les polynômes orthogonaux à avoir.

Proposition 1.6.1 (Existence d'une famille de polynômes orthogonaux) *Soit* $\omega \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ *telle que* $\omega > 0$. *Pour* $f, g \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ *on pose* $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\,dt$.

1. $(\cdot|\cdot)$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$. *On admet que c'est aussi un produit scalaire sur* $\mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$.
2. *Il existe une unique famille orthogonale* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de polynômes unitaires (coefficient dominant qui vaut un) tels que* $\deg P_k = k$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$. *De plus :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Vect}(P_0, ..., P_n) = \mathbb{R}_n[X]$.
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que :* $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ (P_n|Q) = 0$.

On appelle la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de polynômes orthogonaux.*

Démonstration :

1. La symétrie, bilinéarité et positivité sont immédiates. Prouvons la séparation. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $0 = (P|P) = \displaystyle\int_a^b P^2\omega = 0$. La fonction $P^2\omega$ étant continue et positive, alors $P^2\omega$ est nulle sur $[a,b]$ et comme ω est strictement positive, alors : $\forall x \in [a,b],\ P(x) = 0$. Comme $[a,b]$ est infini, alors P admet une infinité de racines et donc : $P = 0$.
2.

3.

Remarque 1.6.1 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* $\mathbb{R}[X]$. *En effet, c'est une famille génératrice, car pour tout* $Q \in \mathbb{R}[X]$, *en posant* $m = d^\circ(Q)$, *on a* $Q \in \mathbb{R}_m[X] = \mathrm{Vect}(P_0, ..., P_m)$. *Elle est aussi libre car toute sous-famille finie de* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de degré échelonné et donc libre.*

Proposition 1.6.2 (Densité de $\mathbb{R}[X]$) *Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ on pose le produit scalaire :*
$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ (f|g) = \int_a^b fg\omega$. *Alors $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme associée.*

Démonstration :

Racines et relation de récurrence des polynômes orthogonaux :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = \prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)$, où $\beta_1, ..., \beta_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P_n dans $]a,b[$ de multiplicité impaire. S'il n'y a pas de telles racines, on pose $Q_n = 1$.
   (a) Montrer que P_nQ_n est de signe constant sur $[a,b]$.
   (b) Montrer que si on a $d°Q_n < n$, alors on a $P_nQ_n = 0$ et donc une contradiction.
   (c) En déduire que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples et dans $]a;b[$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$XP_{n+1} = P_{n+2} + b_nP_{n+1} + a_nP_n \text{ avec } a_n = \frac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2} \text{ et } b_n = \frac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{||P_{n+1}||^2}.$$

   (On commencera par écrire $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$ et on cherchera à calculer les c_k.)

Exemple 1.6.1 *Cas $[a,b] = [-1,1]$ et $\omega = 1$.*
On pose $L_n = \frac{d^n}{dX^n}[(X^2-1)^n]$ (polynômes de Legendre).

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de L_n ?*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = (X^2-1)^n$. Montrer : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ Q_n^{(k)}(1) = Q_n^{(k)}(-1) = 0$.*
3. *Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On suppose $p > q$. Montrer que $(L_p|L_q) = -\int_{-1}^{1} Q_p^{(p-1)}Q_q^{(q+1)}$.*
4. *Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.*

On peut aussi se contenter d'avoir ω intégrable sur $]a,b[$. En voici un exemple :

Exemple 1.6.2 *Nous avons vu dans le chapitre 5 une suite de polynômes* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *appelés polynômes de Tchebychev telle que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ *et* $d^\circ(T_n) = n$.
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ *et pour tout* f, g *dans* E, *on pose* $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
Cette intégrale est bien définie car

On peut montrer que $(.|.)$ *définit bien un produit scalaire sur* E.
On a aussi : $\forall f, g \in E,\ (f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)g(\cos\theta)d\theta$, *car*

Cette dernière expression du produit scalaire et des raisonnements proches des séries de Fourier que l'on a vu en exemple, permettent de montrer que la famille $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est orthogonale*
(on a $(T_n|T_m) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0$ *si* $n \neq m$*).*

On peut même travailler sur un intervalle non borné.

Exemple 1.6.3 *Soit* E *l'ensemble des fonctions* f *continues sur* $\mathbb{R}_+$ *telles que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ *converge.*
On pose le produit scalaire : $\forall f, g \in E,\ (f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}_+$, *on pose* $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$. *C'est une famille orthonormée (faire une succession d'IPP comme pour les polynômes de Legendre). Cette famille s'appelle polynômes de Laguerre.*

2 Adjoint d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension n.

Proposition 2.0.1 (Existence de l'adjoint) *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Soit* $y \in E$. *Il existe un unique vecteur que l'on note* $u^*(y)$ *tel que :*

$$\forall x \in E,\ (y|u(x)) = (u(x)|y) = (x|u^*(y)) = (u^*(y)|x).$$

Démonstration :

Définition 2.0.1 (Adjoint d'un endomorphisme) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $y \mapsto u^*(y)$ est appelé adjoint de u et on la note u^*.*

Proposition 2.0.2 (Linéarité de u^*) *L'application u^* est un endomorphisme de E.*

Démonstration : Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall z \in E,\ (z|u^*(\lambda x+\mu y)) = (u(z)|\lambda x+\mu y) = \lambda(u(z)|x)+\mu(u(z)|y) = \lambda(z|u^*(x))+\mu(z|u^*(y)) = (z|\lambda u^*(x)+\mu u^*(y)).$$

Ainsi : $\forall z \in E,\ (z|u^*(\lambda x + \mu y) - (\lambda u^*(x) + \mu u^*(y))) = 0$, soit
$u^*(\lambda x + \mu y) - (\lambda u^*(x) + \mu u^*(y)) \in E^\perp = \{0\}$, puis : $u^*(\lambda x + \mu y) = \lambda u^*(x) + \mu u^*(y)$.

Exemple 2.0.1

1. *On a $(Id_E)^* =$ En effet,*

2. *De la même manière, on montre que $0^* = 0$.*
   On peut aussi évoquer le fait que $u \mapsto u^*$ soit linéaire (c'est même un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$).
3. *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M, N) \mapsto tr(M^T N)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
   Soit $L_A : M \mapsto AM$ qui est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer L_A^*.

4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $[\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0\ \ (*)] \Leftrightarrow u^* = -u$.*

5. ***(CCP 63)*** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   Dans ce cas, on dit que u est un endomorphisme normal.

Proposition 2.0.3 (Propriétés de l'adjoint) *Soient* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
2. $u^{**} = u$.
3. $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$.

Démonstration :

1.

2. Soit $y \in E$. On a : $\forall x \in E,\ (u^*(x)|y) = (y|u^*(x)) = (u(y)|x)$. Par unicité de l'adjoint pour l'endomorphisme u^*, on trouve que $u^{**}(y) = u(y)$.
3. Soit $y \in E$. On a :

$$\forall x \in E,\ ((\lambda u+\mu v)(x)|y) = \lambda(u(x)|y)+\mu(v(x)|y) = \lambda(x|u^*(y))+\mu(x|v^*(y)) = (x|\lambda u^*(x)+\mu v^*(x)).$$

Par unicité de l'adjoint pour $\lambda u + \mu v$, on a : $(\lambda u + \mu v)^*(y) = \lambda u^*(y) + \mu v^*(y)$.

Remarque 2.0.1 *Il peut être très pratique d'utiliser la propriété* $u^{**} = u$ *pour limiter les vérifications, comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 2.0.2 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Montrer que* $|||u||| = |||u^*|||$*. On rappelle que :* $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

Proposition 2.0.4 (Matrice de l'adjoint) *Soient* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *une base* <u>*orthonormée*</u> *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On pose* $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$*. Alors*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^*) =$$

Démonstration :

Remarque 2.0.2 *(IMPORTANTE) Grâce à cette proposition, on a les liens suivants entre u et u^* :*

-
-
-
-

car toutes ces quantités sont les mêmes pour A et A^T.

Exemple 2.0.3 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u^*) = (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\mathrm{Ker}\,(u))^\perp$, puis que $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^*) = E$.*

Proposition 2.0.5 (Stabilité de l'orthogonale par l'adjoint) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel stable par u : $u(F) \subset F$. On a alors*

$$u^*(F^\perp) \subset F^\perp.$$

Démonstration : Soit $x \in u^*(F^\perp)$. Il existe $z \in F^\perp$ tel que $x = u^*(z)$. On a :
$\forall y \in F,\ (x|y) = (u^*(z)|y) = (\underbrace{z}_{\in F^\perp} | \underbrace{u(y)}_{\in u(F) \subset F}) = 0$. Ainsi, on a : $x \in F^\perp$.

3 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

3.1 Isométries vectorielles

Dans tout ce paragraphe, E désignera un espace euclidien de dimension n.

3.1.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1 (Isométrie vectorielle) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une isométrie vectorielle (parfois appelée automorphisme orthogonal), si u conserve la norme :*

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E, que l'on appelle groupe orthogonal.

Exemple 3.1.1 *Id_E, $-Id_E$ sont des isométries vectorielles.*

Remarque 3.1.1 *Soit $u \in O(E)$, alors $|||u||| =$*

Le mot automorphisme employé pour les isométries vectorielles provient de :

Proposition 3.1.1 ($O(E) \subset GL(E)$) ***(Démo CCP 78)*** *Soit $u \in O(E)$. Alors u est bijective.*

Démonstration :

Proposition 3.1.2 (Une symétrie orthogonale est une isométrie) *Les symétries orthogonales et les réflexions sont des isométries vectorielles.*

Démonstration : Il suffit de le faire pour les symétries orthogonales, car les réflexions sont des symétries orthogonales particulières. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a donc $E = F \oplus F^{\perp}$.

3.1.2 Les différentes caractérisations des isométries vectorielles

Proposition 3.1.3 (Caractérisation par la conservation du produit scalaire) ***(Démo CCP 78)*** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a les équivalences entre les deux propositions suivantes :*

1. $u \in O(E)$.
2. *u préserve les produits scalaires, c'est-à-dire :* $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

Démonstration :

Exemple 3.1.2

1. *Soit $H = u^{\perp}$, avec $u \in E \setminus \{0\}$. Soit $f \in O(E)$ et s la réflexion d'hyperplan H.*
   (a) *Montrer que :* $f(H) = (f(u))^{\perp}$.
   (b) *Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une réflexion dont on précisera les éléments caractéristiques.*
   (c) *Montrer que $f \circ s = s \circ f$ si et seulement si u est vecteur propre de f.*
   (d) *En déduire toutes les applications $f \in O(E)$ telles que :* $\forall g \in O(E),\ fg = gf$.

2. *Soit* $f \in O(E)$.
   (a) *Montrer que :* $\mathrm{Im}\,(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - Id_E) = E$.
   (b) *Déterminer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} f^k$.

Proposition 3.1.4 (Caractérisation par l'adjoint) *Soit* $u \in GL(E)$. *On a les équivalences entre les deux propositions suivantes :*

1. $u \in O(E)$.
2. $u^* = u^{-1}$.

Démonstration : $u \in O(E)$ si et seulement si : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y) = (u(x)|u(y)) = (x|u^* \circ u(y)) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ (x|u^* \circ u(y) - y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E,\ u^* \circ u(y) - y \in E^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \forall y \in E,\ u^* \circ u(y) = y \Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E \Leftrightarrow u^* = u^{-1}$.

Proposition 3.1.5 (Caractérisation par l'image d'une base orthonormée) ***(Démo CCP 78)*** *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base orthonormée de* E. *On a les équivalences suivantes :*

1. u est une isométrie vectorielle.
2. $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée.

Démonstration :

Exemple 3.1.3 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = e_{\sigma(j)}$. Montrer que f est isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$.*

3.1.3 Les groupes $O(E)$ et $SO(E)$

Proposition 3.1.6 (Structure de $O(E)$) ***(Démo CCP 78)*** *$(O(E), \circ)$ est un groupe.*

Démonstration :

Proposition 3.1.7 (Déterminant d'une isométrie vectorielle) *Soit $u \in O(E)$. Alors on a : $\det(u) \in$*

Démonstration : On a grâce à la remarque 2.0.2 : $\det(u^*) = \det(u)$, soit : $\det(u^{-1}) = \det(u)$, soit : $\dfrac{1}{\det(u)} = \det(u)$, soit : $1 = (\det(u))^2$, soit : $\det(u) \in \{1, -1\}$.

Remarque 3.1.2 *ATTENTION : $\det(f) = \pm 1$, n'implique pas : $f \in O(E)$.*
Contre-exemple : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, y) \end{array} \right.$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det(f) = 1$, mais $\|f((0, 1))\| = \|(1, 1)\| = \sqrt{2} \neq 1 = \|(0, 1)\|$.

Définition 3.1.2 (Le groupe $SO(E)$) *On note $SO(E) = \{f \in O(E),\ \det(f) = 1\}$ appelé groupe spécial orthogonal et ses éléments sont nommés isométries directes.*
Les éléments de $O(E) \setminus SO(E)$ sont appelés isométries indirectes.

Proposition 3.1.8 (Structure de $SO(E)$) *$(SO(E), \circ)$ est un groupe en tant que sous-groupe de $O(E)$.*

Démonstration :

3.2 Matrices orthogonales

3.2.1 Définition et caractérisations

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous rappelons que nous avons les équivalences :
$A^T A = I_n \Leftrightarrow AA^T = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

Définition 3.2.1 (Matrice orthogonale) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^T A = I_n$ est dite orthogonale. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.*

Remarque 3.2.1 *(IMPORTANTE) On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a alors $\|AX\| =$*
Ainsi $|||A||| =$

Exemple 3.2.1 1. *Dénombrer le nombre de matrices de $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R})$.*

2. *$O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte.*

3. *Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n)$ et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.*

   (a) *Calculer $U^T AU$.*

   (b) *En déduire $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$.*

   (c) *Étudier le cas d'égalité.*

4. (a) *Soient* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *et* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Calculer* $(X^T AX)^T$ *et en déduire que* $X^T AX = 0$.
   (b) *Montrer que si* A *possède une valeur propre réelle alors celle-ci est égale à* 0. *En déduire que* $I_n + A$ *est inversible.*
   (c) *Soit* $U \in O_n(\mathbb{R})$ *dont* -1 *n'est pas valeur propre. Montrer qu'il existe une unique matrice* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $U = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

Proposition 3.2.1 (Matrice d'un automorphisme orthogonal) *Soient* E *espace euclidien de dimension* n, $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *une base* <u>*orthonormée*</u> *de* E *et* $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. *Alors on a :*

$$u \in O(E) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration : On sait que $A^T = Mat_{\mathcal{B}}(u^*)$. On a donc les équivalences suivantes :

$$u \in O(E) \Leftrightarrow u^{-1} = u^* \Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Remarque 3.2.2 *Si on munit* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *du produit scalaire usuel, alors pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *alors l'endomorphisme canoniquement associé* $f : X \mapsto AX$ *est une isométrie vectorielle si et seulement si* A *est dans* $O_n(\mathbb{R})$. *En effet la matrice de* f *dans la base canonique est* A. *Comme la base canonique est orthonormée, il suffit d'utiliser la proposition précédente.*

Exemple 3.2.2 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, *une permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *et* $M_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. *Soient* $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. *Montrer que* $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma \circ \sigma'}$.
2. *Montrer que :* $M_\sigma^T = M_{\sigma^{-1}}$.

Proposition 3.2.2 (Caractérisation des matrices orthogonales par les lignes ou les colonnes) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(C_1, ..., C_n)$ ses vecteurs colonnes et $(L_1, ..., L_n)$ ses vecteurs lignes. On a les équivalences suivantes :*

1. $A \in O(n)$.
2. $(C_1, ..., C_n)$ *est une base orthonormée de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire usuel.*
3. $(L_1, ..., L_n)$ *est une base orthonormée de* $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire usuel.*

Démonstration :

Cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car on a donc n vecteurs colonnes libres (famille orthonormée) dans un espace vectoriel de dimension n.
Pour le dernier point, on conclut de même en constatant que : $AA^T = [(L_i|L_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$, d'où :
$AA^T = I_n \Leftrightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ (L_i|L_j) = \delta_{i,j}$.

Remarque 3.2.3 *Si $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $O(n)$, alors : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ |a_{i,j}| \leq 1$, car*

Exemple 3.2.3

1. *Déterminer l'inverse de :* $A = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) *Pour quels a, b a-t-on A dans $O(3)$?*
   (b) *Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A ?*

Corollaire 3.2.1 (Matrice de passage orthogonale) *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est dans $O(n)$ si et seulement si M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.*

Démonstration : On suppose que M dans $O(n)$ et on note $(C_1, ..., C_n)$ les colonnes de M. Ainsi M est la matrice de passage de la base canonique à la base $(C_1, ..., C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ces deux bases sont orthonormées pour le produit scalaire usuel.
Soient $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, ..., v_n)$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E telles que $M = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [m_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$. On note $(C_1, ..., C_n)$ les colonnes de M. On a : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ v_j = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} u_k$.

Ainsi on a : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \delta_{i,j} \underbrace{=}_{\mathcal{C}\text{ B.O.N.}} (v_i|v_j) \underbrace{=}_{\mathcal{B}\text{ B.O.N.}} \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = (C_i|C_j)$. Ainsi les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc M est dans $O(n)$.

Remarque 3.2.4 *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux bases orthonormées de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = Mat_{\mathcal{U}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{U}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ qui est dans $O(n)$. On a : $A' =$*

Exemple 3.2.4 *Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $(C_1, ..., C_n)$ les vecteurs colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les vecteurs colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelera $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telle que $A = QR$. On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Définition 3.2.2 (Matrices orthogonalement semblables) *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et A' sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que :*

$$A = PA'P^{-1} = PA'P^T.$$

3.2.2 Les groupes $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et orientation

Proposition 3.2.3 (Structure de $O_n(\mathbb{R})$) *$(O_n(\mathbb{R}), .)$ est un groupe.*

Démonstration : Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. On a bien sûr : $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

- On a $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.
- Soient $M, N \in O_n(\mathbb{R})$. On a :
  $(M^{-1}N)^T(M^{-1}N) = (M^T N)^T(M^T N) = N^T \underbrace{M^T M}_{=I_n} N = N^T N = I_n$. Donc $M^{-1}N$ est dans $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.2.4 (Déterminant d'une matrice orthogonale) *Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors on a :* $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration : On a : $\det(A^T A) = \det(I_n)$, donc $\det(A^T)\det(A) = 1$, soit $(\det(A))^2 = 1$.

Définition 3.2.3 ($SO(n)$) *L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$ est appelé groupe spécial orthogonal et on le note $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.*
Les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales positives ou diretces et les éléments de $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales négatives ou indirectes.

Proposition 3.2.5 (Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$) *$SO_n(\mathbb{R})$ est un groupe en tant que sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration : C'est la même preuve que pour $SO(E)$.

Définition 3.2.4 (Orientation d'un espace euclidien) *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ on dit qu'elle possède la même orientation que $\mathcal{B}$ si $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) > 0$.*
Orienter un espace euclidien, c'est choisir l'une de ses bases orthonormées $\mathcal{B}$ comme base de référence. Ainsi toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ ayant la même orientation que $\mathcal{B}$ est dite directe et sinon indirecte (ou rétrograde).

Remarque 3.2.5 *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. Ces deux bases ont la même orientation si et seulement si la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est dans $SO(n)$.*

Proposition 3.2.6 (Déterminant dans deux bases orthonormées directes) *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$*

Démonstration : Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On a :
$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Or $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}) = 1$, car $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ est dans $SO_n(\mathbb{R})$ en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées. Ainsi on a :
$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.

3.3 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension deux que l'on munit d'une orientation.

Proposition 3.3.1 (Description de $O(2)$) *Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.*

Démonstration : Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si

Corollaire 3.3.1 (Description de $SO(2)$) *On a : $SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.*

Démonstration : En reprenant la proposition précédente, pour tout θ réel, nous avons :
$\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$ et $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -1$.

Proposition 3.3.2 (Opérations dans $SO(2)$) *Soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :*

1. $R_{\theta_1}R_{\theta_2} =$ 2. $R_\theta^n =$ 3. $R_\theta^{-1} =$ 4. $R_\theta = I_2 \Leftrightarrow$

Démonstration :

1. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a : $R_{\theta_1}R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} =$ $R_{\theta_1+\theta_2}$.
2. Se montre par récurrence grâce au point précédent.
3. Grâce au premier point : $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2$.
4. $R_\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi]$.

Corollaire 3.3.2 (Morphismes de groupes) *1. L'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (SO_2(\mathbb{R}), .) \\ \theta & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \right.$

est un morphisme surjectif de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

2. L'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{U}, \times) & \to & (SO_2(\mathbb{R}), .) \\ e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration : Le premier point découle directement de la proposition précédente.
Pour le deuxième point, nous constatons que l'application est bien définie, car si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, alors $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ et donc : $R_\theta = R_{\theta'}$, puis : $g(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta'})$.
Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a $g(e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}) = g(e^{i(\theta_1+\theta_2)}) = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_1}R_{\theta_2} = g(e^{i\theta_1})g(e^{i\theta_2})$ et donc g est bien un morphisme de groupes. Il est clairement surjectif.
Enfin on a : $g(e^{i\theta}) = I_2 \Leftrightarrow R_\theta = I_2 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow e^{i\theta} = 1$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(g) = \{1\}$ et donc g est aussi injectif, ce qui en fait un isomorphisme.

Remarque 3.3.1 *La première application étant continue et $\mathbb{R}$ étant connexe par arcs, alors $f(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$ l'est aussi.*

Corollaire 3.3.3 (Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$) *Pour toute matrice A, B de $SO_2(\mathbb{R})$, on a : $AB = BA$.*

Démonstration : Grâce au corollaire 3.3.1, il existe θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $A = R_{\theta_1}$ et $B = R_{\theta_2}$. Ainsi grâce à la proposition précédente : $AB = R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_2+\theta_1} = R_{\theta_2}R_{\theta_1} = BA$.

Remarque 3.3.2 *Attention, $SO(n)$ n'est pas commutatif si $n \geq 3$.*

Définition 3.3.1 (Rotation vectorielle d'un espace euclidien) *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation vectorielle d'angle θ, noté r_θ l'endomorphisme défini par :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = R_\theta.$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie (donc θ est bien défini de façon unique modulo 2π).

Remarque 3.3.3

1. *Si $\mathcal{C}$ est une autre base orthonormée directe, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est dans $SO(2)$ (grâce à la remarque 3.2.5, car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont la même orientation) donc commute avec $Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta)$. Et donc $Mat_{\mathcal{C}}(r_\theta) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta)P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta)$, donc θ est bien indépendant de la base orthonormée directe choisie.*
2. *Représentons cela géométriquement. On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on note (i, j) la base canonique qui fixe aussi l'orientation de $\mathbb{R}^2$. Soit r la rotation vectorielle d'angle θ (de centre O). On a alors : $r(i) =$ et $r(j) =$*

3. *Pour définir la notion d'angle, on peut se baser sur les rotations.*
   Soit u et v deux vecteurs unitaires. Il existe une unique rotation r telle que $r(u) = v$. En effet on complète la famille orthonormée (u) en une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, w)$ de E. On peut considérer cette base directe en prenant $-w$ au lieu de w. On a ainsi $v = au + bw$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, car $\|v\| = 1$.
   Soit r une telle rotation. On pose $r(u) = v$. Comme une rotation conserve le produit scalaire, alors $r(u) = v$ et $r(w)$ sont orthogonaux. Or $v^\perp$ est de dimension 1 et $-bu + aw$ est orthogonal à v et non nul. Ainsi $v^\perp = \mathrm{Vect}(-bu + aw)$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $r(w) = \lambda(-bu + aw)$.
   On a donc : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}$. Or le déterminant de cette matrice doit valoir 1, donc $1 = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda$, ce qui donne au plus une matrice.
   Réciproquement, soit $r \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. C'est bien la matrice d'une rotation, car les colonnes sont de norme un et orthogonale entre elles et le déterminant de cette matrice vaut un.
   On définit l'angle $(\widehat{u, v})$ comme l'unique θ à 2π-près tel que r_θ vérifie $r_\theta(u) = v$.
   Plus généralement, soient u et v deux vecteurs non nuls de E. On pose $u_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$ et $v_1 = \dfrac{v}{\|v\|}$.
   On pose $(\widehat{u, v}) = (\widehat{u_1, v_1})$.

Exemple 3.3.1 1. *Donner les angles des rotations vectorielles suivantes :*

   (a) *Id_E :*

   (b) *$-Id_E$:*

2. *Identifier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$*

3. ***(CCP 63)** Un endomorphisme u d'un espace euclidien E vérifiant : $\forall x \in E,\ (x|u(x)) = 0$ est-il forcément nul ?*

4. *Soit f la rotation vectorielle d'angle θ d'un plan euclidien E orienté. Soit $a \in E$ unitaire. Calculer $(f(a)|a)$.*

Le deuxième point du corollaire 3.3.2 permet d'identifier les rotations de $\mathbb{R}^2$, avec l'écriture complexe d'une rotation :

Proposition 3.3.3 (Écriture complexe d'une rotation) *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit M un point du plan d'affixe z. Soit M' d'affixe z' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ. Alors : $z' =$*

Démonstration : Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a donc :
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ et donc :
$z' = x' + iy' = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = e^{i\theta}z.$

Remarque 3.3.4 *Rappelons l'écriture complexe d'autres transformations :*

1. *Soit a un nombre complexe. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe a. À un point M du plan d'affixe z_M, on associe son image M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Alors M' a pour affixe : $z_{M'} = z_M + a$.*
2. *Soit $k \in \mathbb{R}^*$. À un point M du plan d'affixe z_M, on associe son image M' par l'homothétie de centre O et de rapport k. Alors M' a pour affixe : $z_{M'} = kz_M$*
3. *On appelle similitude directe du plan complexe toute application de la forme $f : z \mapsto az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \times \mathbb{C}$.*
   On pose $a = re^{i\theta}$. On pose $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, qui est un point fixe de f. Ainsi :
   $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) - \omega = re^{i\theta}(z - \omega)$. On parle donc de similitude de centre ω, de rapport r et d'angle ω. C'est donc la composée de l'homothétie de rapport k et de centre ω et de la rotation de centre ω et d'angle θ.

Nous rappelons que les éléments de $O(2) \setminus SO(2)$ sont de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.3.1 (Classification des isométries du plan) *Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est soit une réflexion (si son déterminant vaut -1 dans une base orthonormée directe), soit une rotation (si son déterminant vaut 1 dans une base orthonormée directe).*

D'emonstration : Le cas des éléments de $SO(E)$ vient d'être traité via $SO_2(\mathbb{R})$, ce sont toutes les rotations.
Maintenant, soit $f \in O(E) \setminus SO(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = S_\theta$. Le polynôme caractéristique de S_θ est :
$\begin{vmatrix} X - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & X + \cos\theta \end{vmatrix} = (X - \cos\theta)(X + \cos\theta) - \sin^2\theta = X^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
Ainsi le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc S_θ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Cherchons $E_1(S_\theta)$. Nous avons : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(S(\theta)) \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos\theta - 1)x + (\sin\theta)y &= 0 \\ (\sin\theta)x - (\cos\theta + 1)y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} -(2\sin^2(\theta/2))x + 2(\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))y &= 0 \\ 2(\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))x - (2\cos^2(\theta/2))y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(\theta/2)(-(\sin(\theta/2))x + (\cos(\theta/2))y) &= 0 \\ 2\cos(\theta/2)((\sin(\theta/2))x - (\cos(\theta/2))y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$-(\sin(\theta/2))x + (\cos(\theta/2))y = 0$, car on ne peut pas avoir en même temps $\sin(\theta/2) = 0$ et $\cos(\theta/2) = 0$, sinon $\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 0 \neq 1$.
Ainsi $E_1(S_\theta)$ est une droite vectorielle et comme le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ vu dans $\mathbb{R}^2$ vérifie équation précédente, alors $E_1(S_\theta) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$. De même on montre que $E_{-1}(S_\theta) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$.
Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$ sont orthogonaux et que l'on est en dimension 2, alors $E_1(S_\theta)) = (E_{-1}(S_\theta))^\perp$. Ainsi f correspond à la réflexion d'axe $\mathcal{D}_\theta$ engendrée par le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.

Exemple 3.3.2 *Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_2$ et $A^2 = A^T$.*

1. *Montrer que $A^3 = I_2$, puis que A est dans $SO(2)$.*
2. *Déterminer toutes les matrices A vérifiant le problème de départ.*

3.4 Réduction des isométries vectorielles en base orthonormé

3.4.1 Cas général

Pour la réduction des isométries vectorielles ou pour la réduction des endomorphismes symétriques que l'on verra plus tard, nous avons besoin du lemme et de la proposition suivants :

Lemme 3.4.1 (Plan ou droite stable dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F de dimension finie (pas nécessairement euclidien), alors f admet au moins une droite stable ou un plan stable.*

Démonstration :

Proposition 3.4.1 (Isométries vectorielles et sous-espaces stables) *Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f (c'est-à-dire $f(F) \subset F$). Alors on a :*

- *f induit une isométrie vectorielle sur F.*
- *$f(F^\perp) \subset F^\perp$.*

Démonstration : Pour le premier point, soit $\tilde{f} : F \to F$ l'endomorphisme induit par f sur F et on a toujours : $\forall x \in F,\ \|\tilde{f}(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$ et donc $\tilde{f}$ est dans $O(F)$.
Pour le deuxième point : comme $\tilde{f}$ est dans $O(F)$, alors $\tilde{f}$ est un isomorphisme de F et donc f réalise une bijection de F dans F, en particulier $f(F) = F$.
Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$. Il existe donc $z \in F$ tel que : $y = f(z)$. On a :
$(f(x)|y) = (f(x)|f(z)) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{z}_{\in F}) = 0$. Ainsi : $f(x) \in F^\perp$, puis $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

Remarque 3.4.1 *Comme f induit une isométrie vectorielle $\tilde{f}$ sur F, alors la proposition 3.1.1, nous dit que $\tilde{f}$ est une bijection de F dans F et donc : $f(F) = \tilde{f}(F) = F$.*
On a même $f(F^\perp) = F^\perp$, en remplaçant F par $F^\perp$ (car $F^\perp$ est stable par f grâce à la proposition précédente).

Théorème 3.4.1 (Réduction d'une isométrie vectorielle) *Si $u \in O(E)$ alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux de la forme*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2s = n$ et pour tout i de $[\![1, s]\!]$, l'angle θ_i choisi dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et :
$\forall \theta \in \mathbb{R},\ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Autrement dit, l'espace E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans sur lesquels u induit des rotations.

Démonstration : Par récurrence forte sur la dimension de E.

• Cas $n = 1$:
u est une isométrie d'une droite et peut donc être représentée en base orthonormale par (1) ou (-1).

• Cas $n = 2$:
u est une isométrie du plan et peut donc être représentée en base orthonormale par $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, si on a une isométrie positive (une rotation) et par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ si on a une isométrie négative (réflexion), grâce à la remarque 1.5.3.

• Supposons la propriété établie jusqu'au rang n avec $n \geq 2$.
Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $u \in O(E)$.
Grâce au lemme précédent, il existe une droite ou un plan F stable par u et $F^\perp$ est alors aussi stable par u et u induit un automorphisme orthogonal sur $F^\perp$, grâce à la proposition 3.4.1.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale de $F^\perp$ telle que la matrice de u dans celle-ci soit de la forme voulue.
Par l'étude initiale ($n = 1$ et $n = 2$), il existe une base orthonormale de F telle que la matrice de u dans celle-ci soit de la forme voulue.
En accolant les base orthonormées de F et $F^\perp$, on forme une base orthonormale de E comme voulue.
Ceci donne la propriété pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.
Une fois que la matrice a la forme voulue reste à regarder plus attentivement les angles figurant dans les $R(\theta_i)$. Nous pouvons d'abord choisir θ dans $]-\pi,\pi]$. Nous remarquons que $R(0) = I_2$ et $R(\pi) = -I_2$, donc les blocs qui correspondent à ces rotations peuvent être intégrés dans I_p ou $-I_q$.

Remarque 3.4.2 *(IMPORTANTE) Soit $f \in O(E)$, alors $Sp(f)$*

Exemple 3.4.1 *1. Quelles sont les applications f de $O(E)$ diagonalisables ?*

2. Soit $f \in O(E) \setminus SO(E)$. Montrer que : $-1 \in Sp(f)$.

Corollaire 3.4.1 (Réduction des matrices orthogonales) *Pour toute matrice M de $O_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice P dans $O_n(\mathbb{R})$ telle que :*

$$M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2s = n$ et pour tout i de $[\![1, s]\!]$, l'angle θ_i choisi dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Démonstration : Nous considérons la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = M$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors f est un automorphisme orthogonal et grâce à la proposition précédente a une matrice de la forme $M' = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$. Si on pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage des base orthonormées $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, qui est donc dans $O_n(\mathbb{R})$, alors $M = PM'P^{-1}$.

Exemple 3.4.2 *Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.*

3.4.2 Cas des isométries vectorielles directes en dimension 3

Dans ce paragraphe, on suppose que $\dim(E) = 3$ et on munit E d'une orientation.

Proposition 3.4.2 (Réduction des isométries directes en dimension 3) *Soit $u \in SO(E)$. Il existe alors une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Grâce un théorème de réduction des isométries, la matrice de u dans une certaine base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, avec $p + q = 3$ ou $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $\det(u) = 1$, alors dans le premier cas, nous avons $p = 3$ ou $p = 1$ et dans le deuxième $\epsilon = 1$. Comme $R(0) = I_2$ et $R(\pi) = -I_2$, dans tous les cas on a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$.

Définition 3.4.1 (Rotation vectorielle de l'espace) *Si une application u a pour matrice $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe, alors on dit que u est la rotation d'axe orienté par i et d'angle θ.*

Remarque 3.4.3

1. *(IMPORTANTE) u induit une rotation d'angle θ dans la plan $P = D^\perp = vect(j, k)$, qui orienté par (j, k).*
2. *L'axe de la rotation se trouve en cherchant* $\operatorname{Ker}(u - Id_E)$ *car u laisse fixe l'axe de la rotation qui est $vect(i)$.*
3. *Nous avons $(u(j)|j) =$ et $(u(j)|k) =$*
   Ces relations permettent de trouver l'angle de la rotation.
4. *Une rotation d'angle π est appelé retournement de l'espace.*

Exemple 3.4.3

1. *Soit $u \in SO(E)$ tel que $tr(u) = -1$. Que dire de u ?*

2. *Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation r d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe orienté par $a = (1, 1, 1)$.*

3. (a) *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer* $\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix}\right)$.

   (b) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :* $\exp(A)^T = \exp(A^T)$.

   (c) *En déduire que :* $\exp(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = SO_3(\mathbb{R})$.

4 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Dans tout ce paragraphe, $(E, (\cdot|\cdot))$ désignera un espace euclidien de dimension n.

4.1 Endomorphismes autoadjoints

Définition 4.1.1 (Endomorphismes autoadjoints) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint (que l'on appelle aussi endomorphisme symétrique) lorsque $u^* = u$, autrement dit :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Remarque 4.1.1 *(IMPORTANT) u^*u et uu^* sont autoadjoints, car $(u^*u)^* = u^*u^{**} = u^*u$ et de même pour uu^*.*

Exemple 4.1.1 *1. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :*

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ.$

On pose l'endomorphisme $d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (d(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)P'(x)Q'(x)dx$. En déduire que d est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Déterminer $\mathrm{Ker}\,(d)$.

2. *Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, ..., e_m)$ une famille libre (pas forcément orthonormée) de E. On pose f l'application définie par :* $\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^{m} (x|e_i)e_i$.
Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint et déterminer son noyau.

3. *Si u est en endomorphisme autoadjoint, alors :* $(\operatorname{Ker} u)^{\perp} = \operatorname{Im} u$.

Proposition 4.1.1 (Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. u est autoadjoint si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration : On rappelle que $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = (Mat_{\mathcal{B}}(u))^T$, car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Ainsi $u = u^*$ si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = (Mat_{\mathcal{B}}(u))^T$.

Remarque 4.1.2
1. *Ceci ne dépend pas du choix de la base orthonormée. En effet si $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ orthonormée, alors P est orthogonale et la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est $P^{-1}AP = P^TAP$, encore symétrique.*
2. *Ceci est faux si la base n'est pas orthonormée. Si dans la remarque précédente, on prend une base $\mathcal{B}'$ quelconque, alors P n'est plus orthogonale et si on pose $M = P^{-1}AP$, donc :*
$M^T = (P^{-1}AP)^T = P^TA^T(P^T)^{-1} = P^TA(P^T)^{-1}$. *A priori il n'y a aucune raison d'avoir $M^T = M$.*
3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $u : X \mapsto AX$ est un endomorphisme autodjoint de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est symétrique.*
En effet, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $Mat_{\mathcal{B}}(u) = A$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T$. Ainsi $u = u^*$ si et seulement si $A = A^T$.
4. *Si on note $\varphi : u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$, alors φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\varphi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension*
$\dfrac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Proposition 4.1.2 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux) *Soit p un projecteur. Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est autoadjoint.*

Démonstration : On suppose que p est une projection orthogonale.

Exemple 4.1.2 *Soit* $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. *Montrer que l'endomorphisme p canoniquement associé à A est une projection orthogonale sur un espace que l'on précisera.*

4.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Proposition 4.2.1 (Orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomoprhisme autoadjoint)

1. *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*
2. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Démonstration :

1.

2. Cela provient du premier point et de la remarque 4.1.2.

Exemple 4.2.1 1. ***(CCP 101)*** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. *On montre que $-1/2$ est valeur propre de A, car* $A - \dfrac{-1}{2}I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *et donc* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *est dans* $\mathrm{Ker}\left(A - \dfrac{-1}{2}I_3\right)$ *si et seulement si* $x+y+z=0$. *Ainsi* $E_{\frac{-1}{2}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Comment trouver rapidement $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in D_3(\mathbb{R})$ telles que : $D = P^{-1}AP$?

2. *Soit s une symétrie vectorielle. Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est autadjoint.*
   On suppose que s est une symétrie orthogonale par rapport à F. Soient x, y deux vecteurs quelconques de E. Alors :
   $x = x_1 + x_2$ *avec* $x_1 \in F,\ x_2 \in F^{\perp}$, $y = y_1 + y_2$ *avec* $y_1 \in F,\ y_2 \in F^{\perp}$.
   Par conséquent : $(s(x)|y) = (x_1 - x_2|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) - (x_2|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1|y_1) - (x_1|y_2) + (x_2|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1 + x_2|y_1 - y_2) = (x|s(y))$.
   Il s'ensuit que s est bien autoadjoint.
   Réciproquement si s est autoadjoint :

Proposition 4.2.2 (Sous-espace stable par un endomorphisme symétrique) *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E stable de u. Alors on a : $u(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$ et u induit un endomorphisme autoadjoint sur F et $F^{\perp}$.*

Démonstration : On sait que $u^*(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$ et comme $u = u^*$, on a dont le résultat. u induit un endomorphisme autoadjoint sur F, car on a encore : $\forall x, y \in F,\ (u(x)|y) = (x|u(y))$.

Remarque 4.2.1 *Ainsi si u est symétrique, alors si on a $E = F \oplus F^{\perp}$, avec $u(F) \subset F$, alors dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme, la matrice de u est :*

Théorème 4.2.1 (Théorème spectral) *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.*
u est autoadjoint si et seulement si u est diagonalisable dans une base orthonormée.
On peut reformuler ceci de la façon suivante : u est autoadjoint si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ avec les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration : Pour le sens retour, si u est diagonalisable dans une base orthonormée, alors sa matrice dans celle-ci est symétrique (car diagonale) et donc u est autoadjoint (proposition 4.1.1).
Supposons que u soit autoadjoint. Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux, il suffit de justifier que u est diagonalisable. En effet, pour chaque sous-espace propre, on peut construire une base orthonormée (on est en dimension finie d'un espace euclidien). Si u est diagonalisable, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, avec $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et donc en regoupant les base de chaque $E_{\lambda_i}(u)$, on a une base adaptée à cette décomposition pour laquelle les vecteurs sont tous de norme un et orthogonaux entre eux. En effet si on prend deux vecteurs de cette base, soit ils sont dans

des sous-espaces propres différents, donc ils sont orthogonaux, soit ils sont dans le même sous-espaces propres et ils sont donc encore orthogonaux, car les bases construites sur chaque $E_{\lambda_i}(u)$ sont orthonormées.

Montrons le résultat par récurrence forte sur $n = \dim(E)$ avec n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(n)$: si E est un espace euclidien de dimension n et u est un endomorphisme autoadjoint de E, alors u est diagonalisable.
$\mathcal{P}(1)$: c'est immédiat, car tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension un est diagonalisable (sa matrice est forcément diagonale dans toute base).
$\mathcal{P}(2)$:

Pour la reformulation, u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$. On suppose maintenant u diagonalisable.
Si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ est constituée d'espaces orthogonaux deux à deux, alors u est diagonalisable en base orthonormée, cela a été mentionné au début. Ainsi u est autoadjoint.
Si u est autoadjoint, on peut trouver une base orthonormée de diagonalisation. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de u et on numérote la base de diagonalisation $(e_1^{(1)}, ..., e_{n_1}^{(1)}, ..., e_1^{(p)}, ..., e_{n_p}^{(p)})$, avec $e_k^{(i)}$ qui est vecteur propre pour la valeur propre λ_i, pour i dans $[\![1, p]\!]$ et donc $\mathrm{Vect}(e_1^{(i)}, ..., e_{n_i}^{(i)}) \subset E_{\lambda_i}$. Pour l'inclusion inverse, on a par diagonalisabilité de u : $n = \sum_{i=1}^{p} n_i \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = n$, donc dans ces inégalités, on n'a que des égalités, soit : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ n_i = \dim(E_{\lambda_i})$ et donc : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1^{(i)}, ..., e_{n_i}^{(i)}) = E_{\lambda_i}$.
Le fait que les vecteurs $e_k^{(i)}$ soient orthogonaux entre eux fait que les sous-espaces E_{λ_i} le sont aussi.

Remarque 4.2.2 *En reprenant ce qui a été dit au début de la preuve précédente, si u est autoadjoint, alors u est diagonalisable et $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, avec $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et pour construire une base orthonormée de diagonalisation, il suffit de contruire une base orthonormée de chaque $E_{\lambda_i}(u)$ (par exemple grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) et de regrouper toutes ces bases, car les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Exemple 4.2.2 1. *On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :*

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \int_{-1}^{1} PQ.$

On pose l'endomorphisme $d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ *de* $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) *Montrer que d est diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire cité.*

(b) *Soit* $\lambda \in Sp(d)$. *Donner une relation entre les degrés des vecteurs propres associés à* λ *et* λ.

2. *Soit* E *un espace euclidien et* u *un endomorphisme autoadjoint de* E. *On note* $\lambda_1, ..., \lambda_p$ *ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant* ($\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_p$). *Pour* i *dans* $[\![1, p]\!]$, *on note* E_i *le sous-espace propre associé à la valeur propre* λ_i.

   (a) *Montrer que :* $\forall x \in E,\ \lambda_1 \|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq \lambda_p \|x\|^2$.

   (b) *Pour quels vecteurs* x *l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?*

   (c) *Montrer que* $|\!|\!|u|\!|\!| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.

Théorème 4.2.2 (Théorème spectral version matricielle) *Pour toute matrice A symétrique réelle, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que :* $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Démonstration : Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel. Ainsi u est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire usuel et il existe donc une base orthonormée $\mathcal{B}'$ qui diagonalise u. Ainsi on a : $A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(u)(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$. Si on pose $D = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors D est diagonale et P est orthogonale en tant que matrice de passage d'une base orthonormée à une autre. Ainsi on a aussi $P^{-1} = P^T$.

Remarque 4.2.3

1. *ATTENTION, ceci n'est valable que pour les matrices réelles. Si on prend* $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, *elle est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable. En effet, on a :* $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, *donc si A est diagonalisable, alors il existe P dans $GL_2(\mathbb{C})$ tel que :* $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, *ce qui n'est pas le cas.*
2. *Pour trouver P en pratique, on cherche les sous-espaces propres de A, puis on trouve une base orthonormée de chaque sous-espace propre en utilisant éventuellement l'algorithme de Gram-Schmidt.*
3. *Quitte à échanger deux colonnes de P, on peut imposer que* $\det(P) = 1$, *soit* $P \in SO_n(\mathbb{R})$.

Exemple 4.2.3

1. ***(CCP 68)*** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Nous avons vu dans le chapitre 6 que A est diagonalisable, car*
   On a trouvé : $Sp(A) = \{0, 3\}$, $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ x - y + z = 0 \right\}$ *et* $E_3(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
   Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E qui admet A pour matrice dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée qui diagonalise f.

2. *Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$). Montrer que :* $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda_1 X^T X \leq X^T A X \leq \lambda_n X^T X$.

4.3 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques positifs, définis positifs

Définition 4.3.1 (Matrices ou endomorphismes positifs) *1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX \geq 0 (\textit{respectivement : } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T AX > 0).$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On dit que u est autoadjoint positif (respectivement autoadjoint défini positif) si

$$\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0 (\textit{respectivement : } \forall x \in E \setminus \{0\},\ (u(x)|x) > 0).$$

On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadjoints positifs et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadjoints définis positifs.

Remarque 4.3.1 *1. (IMPORTANTE) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On a :*
$u \in S^+(E) \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^+(\mathbb{R})$ et de même : $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

*2. (IMPORTANTE) **(CCP 66)** pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice symétrique $A^T A$ est positive :*

En particulier si A est symétrique, alors A^2 est dans $S_n^+(\mathbb{R})$, car :
$A^T A$ est définie positive si et seulement si

3. (IMPORTANTE) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Nous avons vu que u^*u est autoadjoint. En faisant le lien entre matrice et application linéaire, u^*u est positif et il est défini positif si et seulement si u est bijectif.

4. Une matrice positive ou un endomorphisme positif sont définis positifs si et seulement ils n'ont pas 0 comme valeur propre.

5. Soit $u \in S^{++}(E)$. On peut montrer que $(x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est un produit scalaire sur E

6. Soit $u \in S^{++}(E)$. On peut montrer que $(x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est un produit scalaire sur E (pour $x, y \in E$, on a $(u(x)|y) = (x|u(y)) = (u(y)|x)$, $(u(x)|x) \geq 0$ et : $(u(x)|x) = 0 \Rightarrow x = 0$).

7. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut montrer que $(X, Y) \mapsto X^T AY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $X^T AY =$

En effet :

Exemple 4.3.1 *1. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :*
$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \int_{-1}^{1} PQ$. On pose l'endomorphisme
$d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$. On a vu dans l'exemple 4.1.1, que :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ (d(P)|P) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)(P'(x))^2 dx \geq 0$ et donc : $d \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}_n[X])$.

2. *Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que : $a_{i,i} \geq 0$.*

Proposition 4.3.1 (Caractérisation spectrale de la positivité) 1. ***(CCP 66 pour la démonstration)*** *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si : $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).*

2. *Soit $u \in S(E)$. Alors u est dans $S^+(E)$ (respectivement dans $S^{++}(E)$) si et seulement si : $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$).*

Démonstration :

1.

2. Faire le lien entre application linéaire et matrice.

Pour les endomorphismes :

Exemple 4.3.2 1. *Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes autoadjoints positifs, car un projecteur a un spectre dans $\{0, 1\}$ qui est inclus dans $\mathbb{R}_+$.*
Ainsi pour un projecteur orthogonal p, on a :

2. *Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, ..., e_m)$ une famille libre (pas forcément orthonormée) de E. On pose f l'application définie par : $\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^{m} (x|e_i)e_i$. Nous avons vu dans l'exemple 4.1.1 que f est autoadjoint et que son noyau est $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_m)^\perp$.*
Montrer que f est autoadjoint positif et donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit défini positif.

3. *Soient* $u, v \in S^+(E)$.
   (a) *Montrer que :* $u + v \in S^+(E)$.
   (b) *Montrer que* $\mathrm{Ker}\,(u+v) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)$.

Pour les matrices :

Exemple 4.3.3 1. ***(CCP 66)*** *Soient* $A \in S_n(\mathbb{R})$ *et* $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = BA$. *Montrer que :* $A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2. *Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *définie positive.*
   (a) *Montrer que* $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.
   (b) *En déduire que :* $\sqrt[n]{\det(I_n + A)} \geq 1 + \sqrt[n]{\det(A)}$.

3. *(Racine carrée d'une matrice) Nous rappelons un résultat vu dans le chapitre 6 : soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables tels que : $uv = vu$. Alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.*
   (a) ***(CCP 66)*** *Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.*
   (b) *On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité et $\mu_1, ..., \mu_p$ les valeurs propres de A sans répétitions.*
   i) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ Q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$.
   ii) En déduire que $(Q(A))^2 = A$.
   (c) *Montrer que B est unique.*

4. *(Décomposition polaire) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\exists (A, \Omega) \in S_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}),\ M = \Omega A$.*