DEVOIR À LA MAISON N 12

À rendre pour le mardi 6 février

DM NORMAL

Notations :

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout entier naturel n on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.

Objectifs :

L'objet de ce problème est d'expliciter la valeur d'une fonction (notée ψ) définie par une intégrale.

Dans la **partie I**, on étudie une fonction f et l'on propose un procédé de calcul de la limite de f en $+\infty$. La **partie II** est consacrée à l'étude de deux fonctions (notées h et φ) qui seront utilisées dans la **partie III**.

Partie I
Étude d'une fonction et de sa limite

I.1 **Étude de la fonction** f

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

I.1.1 Montrer que f est une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

I.1.2 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f . Montrer qu'il existe une fonction polynôme p_n, dont on précisera le degré, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2)$$

I.1.3 Que peut-on dire de la parité de p_n ?

I.1.4 Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite). Dans toute la suite du problème, on note Δ cette limite.

I.2 **Développpement en série de** f

I.2.1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

I.2.2 Expliciter $p_n(0)$.

I.3 **Calcul de Δ**

Pour tout entier naturel n, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

I.3.1 Montrer que pour tout réel u, on a $\mathrm{e}^u \geq 1 + u$.

I.3.2 Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leq \mathrm{e}^{-nu} & \text{si} \quad u \leq 1 \\ \mathrm{e}^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n} & \text{si} \quad u > -1 \end{cases}$$

I.3.3 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

I.3.4 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leq W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, calculer Δ.

I.4 **Preuve de $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$**

I.4.1 Calculer W_0 et W_1 et justifier que $W_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.4.2 Montrer que : $\forall n \geq 2,\ nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

I.4.3 En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

I.4.4 Montrer que la suite $(W_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n-1}{n} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$.

I.4.5 En déduire que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I.4.6 À l'aide de la question **I.4.3.** écrire en PYTHON une fonction `W(n)` qui à n associe W_n. Déterminer les 50 premiers termes de nW_n^2 et retrouver l'équivalent précédent.

Partie II
Étude de deux fonctions

II.1 **Étude de la fonction h**

II.1.1 Justifier l'existence, pour tout réel b, de l'intégrale :

$$h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

II.1.2 Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner la valeur de $h'(b)$ sous forme d'une intégrale.

II.1.3 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que h est solution d'une équation diffŕentielle linéaire homogène du premier ordre que l'on précisera.

II.1.4 En déduire $h(b)$ en fonction de b et Δ.

II.2 **Étude de la fonction φ**

II.2.1 Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

II.2.2 Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0, +\infty[$.

II.2.3 Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]\,0, +\infty[$ on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\varphi(x).$$

II.2.4 Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]\,0, +\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie III
Calcul d'une intégrale

III.1 Étude de la fonction ψ

III.1.1 Vérifier que l'on définit une fonction ψ, continue sur $\mathbb{R}$, paire en posant :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

III.1.2 Calculer $\psi(0)$.

III.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et j_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$j_p(x) = \int_0^p y \exp(-(1+x^2)y^2) \,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $(j_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}$. Expliciter sa limite.

III.3 Désormais, a désigne un réel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k_n fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$k_n(y) = \int_0^n y \exp(-y^2x^2)\cos(2ax) \,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Expliciter sa limite.

III.4 Soit $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax) \,\mathrm{d}x$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1 Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et l'expliciter sous forme d'une intégrale.

III.4.2 Montrer que $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^p k_n(y)\exp(-y^2) \,\mathrm{d}y$.

On admettra le théorème de Fubini : soit $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, alors $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$.

III.5 Justifier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y)\exp(-y^2)$.

III.6 Calculer $\psi(x)$.

Préambule

On s'intéresse dans ce problème à certains sous-ensembles de l'espace des fonctions à valeurs réelles et continues sur $]0,+\infty[$. On peut classiquement définir les opérations d'intégration J et de dérivation D de sorte qu'en particulier la composition $D \circ J$ soit l'opérateur identité, où la notation $\circ$ désigne l'opérateur de composition usuel.
On cherche alors à définir pour tout réel $\alpha > 0$ des opérateurs fractionnaires d'intégration J^α et de dérivation D^α tels que $D^\alpha \circ J^\alpha$ soit l'identité et tels que pour tout $\alpha, \beta > 0$ on ait :

$$J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta} \text{ et } D^\alpha \circ D^\beta = D^{\alpha+\beta}.$$

En particulier pour $\alpha = 1/2$, on cherche à définir une racine carrée de D, i.e. un opérateur $D^{1/2}$ tel que $D^{1/2} \circ D^{1/2} = D$.
Parmi les nombreuses approches possibles, nous allons suivre celles de Riemann-Liouville et Caputo.

- On commence par des préliminaires sur la fonction Gamma ;
- on démontre ensuite une version simple du théorème de Fubini pour des fonctions continues sur un carré et qu'on s'autorisera à utiliser dans la suite du problème dans un cadre plus général, cf. la question 2) ;
- on introduit enfin la transformation de Laplace et on prouve son caractère injectif sur les fonctions continues.

L'intégration fractionnaire est définie dans la partie A alors que les dérivées fractionnaires le seront dans la partie B. Dans la dernière partie on s'intéressera enfin à deux équations différentielles fractionnaires simples.
Le candidat est libre d'admettre les résultats de la partie Préliminaires*, pour aborder les parties A, B et C. Pour simplifier les arguments dans les préliminaires on se restreint aux fonctions continues sur* $[0,+\infty[$*, alors qu'on aura parfois besoin de considérer des fonctions continues sur* $]0,+\infty[$ *intégrables au voisinage de* 0*. Le candidat est autorisé à utiliser les résultats des préliminaires dans ce cadre plus général.*

Préliminaires

1. On considère la fonction Gamma définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

- ***a.*** Montrer que Γ est bien définie pour x réel strictement positif.
- ***b.*** Montrer que pour tout $x > 0$, on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- **On admettra pour la suite** que la fonction Gamma précédente peut être prolongée en une fonction qu'on notera encore Γ, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$: l'écriture $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ n'est alors valable que pour $x > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose en outre $\Gamma(-n) := +\infty$.
- **On utilisera aussi** sans justification l'égalité suivante :

$$B(p,q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (E_1)$$

où p, q sont des réels strictement positifs.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ strictement positif et soit $f : [0,a] \times [0,a] \to \mathbb{R}$ définie et continue. Dans cette question on cherche à établir la version simple suivante du théorème de Fubini :

$$\int_0^a \mathrm{d}t \left(\int_0^t f(t,u)\mathrm{d}u \right) = \int_0^a \mathrm{d}u \left(\int_u^a f(t,u)\mathrm{d}t \right), \qquad (E_2)$$

que le candidat pourra utiliser dans la suite du problème pour $a = +\infty$ **lorsque** $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \left(\int_0^t |f(t,u)|\mathrm{d}u \right)$ **converge.**

a. i. Pour $t \in [0,a]$ fixé, soit $h(\eta) = \displaystyle\int_0^t |f(t+\eta,u) - f(t,u)|\,\mathrm{d}u$ définie pour $\eta \in [-t, a-t]$. Montrer que $h(\eta)$ tend vers 0 lorsque η tend vers 0.

ii. Montrer avec soin la continuité de $t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(t,u)\mathrm{d}u$ sur $[0,a]$.

iii. Calculer la dérivée de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t f(t,u)\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$.

b. Pour tous $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant a$, on introduit $h(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^\alpha \left(\int_u^\beta f(t,u)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$.

i. Expliciter la dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}$.

ii. Expliciter $\dfrac{\partial h}{\partial \beta}$.

iii. Montrer que $\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial \beta}$ sont continues sur $[0,a]^2$.

iv. Montrer que la dérivée de $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}u \left(\int_u^x f(t,u)\mathrm{d}t \right)$ est $x \mapsto \int_0^x f(x,u)du$.

Pour les 3/2, on donne la règle de la chaîne : si $\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial \beta}$ sont continues sur $[0,a]^2$, alors : $\forall x \in [0,a]$, $\dfrac{d}{dx}h(x,x) = \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(x,x) + \dfrac{\partial h}{\partial \beta}(x,x)$.

c. Déduire de ce qui précède une preuve de l'égalité (E_2).

3. Pour $f, g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues, on définit leur produit de convolution :

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que $f * g$ est continue sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que le produit de convolution est commutatif.

c. Montrer que le produit de convolution est associatif.

4. Une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue est dite d'ordre exponentiel s'il existe des réels $M > 0$ et r tels que pour tout $t \geqslant 0$, on ait : $|f(t)| \leqslant Me^{rt}$. Pour une telle fonction f, on définit alors sa transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie pour tout réel s assez grand.

b. Montrer que si f est de classe C^1 avec f et f' d'ordre exponentiel, alors pour s assez grand, $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.

c. Soient f et g des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ et d'ordre exponentiel. Montrer que $f * g$ est d'ordre exponentiel.

d. Sous les hypothèses de la question précédente, en utilisant (E_2) pour $a = +\infty$, montrer que, pour s assez grand,
$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).$$

5. On cherche à présent à montrer que $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ pour tout s assez grand si et seulement si $f = g$.

a. Justifier qu'on peut se ramener à chercher les fonctions f telles que $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ pour tout s assez grand.

b. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$, et en déduire que f est la fonction nulle.

c. En déduire que $\mathcal{L}$ est injective.
Indication : on pourra utiliser un changement de variable $y = e^{-t}$.

Dans la suite du problème le candidat pourra librement utiliser les résultats de ces préliminaires dans le cas où les fonctions ne sont plus nécessairement continues en 0 mais y sont seulement intégrables.

A – Intégration fractionnaire

6. Pour $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable au voisinage de 0, on note $I(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout $n \geqslant 2$ on définit par récurrence :
$$I^n(f)(x) := I^{n-1}(I(f))(x).$$
Montrer que $I^2 f(x) = \displaystyle\int_0^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t$, puis que :
$$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

7. Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\Phi_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$
en convenant que pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ négatif ou nul, Φ_α est la fonction nulle.

a. Quelle est la dérivée m^{e} de Φ_α ?

b. Montrer, en utilisant (E_1), que pour tous α, β des réels strictement positifs, on a : $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}$.

c. Expliciter $\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)$ pour $\alpha > 0$.

8. Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit :
$$J^\alpha(f)(x) = \Phi_\alpha * f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u)\mathrm{d}u,$$
et on note J^0 l'opérateur identité, i.e. $J^0(f)(x) = f(x)$. D'après la question 6), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $J^n = I^n$.

a. Montrer que pour tous réels α, β positifs, on a : $J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}$.

b. On suppose f d'ordre exponentiel. Pour $\alpha > 0$, montrer que $\mathcal{L}(J^\alpha f)(s)$ est bien défini pour s assez grand, et égal alors à $s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s)$.

c. Pour α et γ des réels strictement positifs, montrer que $J^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma+\alpha}$.

d. Soit f d'ordre exponentiel et soit $\alpha > 0$. Montrer que $J^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f est la fonction nulle.

e. Montrer que ce résultat reste encore vrai si f n'est pas d'ordre exponentielle.

B – Dérivées fractionnaires

On note D l'opération de dérivation usuel, $D(f)(x) = f'(x)$ lorsque f est dérivable. Par récurrence, lorsque cela est possible, on définit $D^n(f) = D(D^{n-1}f)$ de sorte que trivialement $D^n \circ J^n$ soit l'opérateur identité.

9. Pour f dérivable n fois, montrer que $J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$.

10. Étant donné un réel $\alpha > 0$, on note m l'entier tel que $m-1 < \alpha \leqslant m$, et on déduit $D^\alpha := D^m \circ J^{m-\alpha}$, i.e., sous réserve d'existence,

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m\left(\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}}\mathrm{d}u\right) & \text{si} \quad m-1<\alpha<m, \\ D^m f(t) & \text{si} \quad \alpha = m, \end{cases}$$

et on note D^0 l'opérateur identité.

Remarque : on ne demande pas au candidat de donner des conditions nécessaires pour l'existence de $D^\alpha f$.

a. Pour tout $\alpha > 0$, expliciter $D^\alpha \circ J^\alpha$.

b. Pour $f = \mathbf{1}$, la fonction constante égale à 1, expliciter $D^\alpha\mathbf{1}$ et préciser pour quel α, la fonction $D^\alpha\mathbf{1}$ est la fonction nulle.

c. Pour $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$, montrer que $D^\alpha\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma-\alpha}$.

d. Pour f d'ordre exponentiel, montrer que $D^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f s'écrit sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j x^{\alpha-j}$, où $m-1 < \alpha \leqslant m$.

11. Loi des exposants.

a. Soient $f = \Phi_{1/2}$ et $\alpha = \beta = 1/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)f$ et $D^{\alpha+\beta}f$.

b. Soient $g = \Phi_{3/2}$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)g$, $(D^\beta \circ D^\alpha)g$ et $D^{\alpha+\beta}g$.

c. Soit $f(t) = t^\lambda \eta(t)$ où $\lambda > -1$ et $\eta(t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R > 0$.

Montrer alors que pour tous $0 \leqslant t < R$, $0 \leqslant \beta < \lambda+1$ et $\alpha \geqslant 0$, on a : $(D^\alpha \circ D^\beta)f = D^{\alpha+\beta}f$.

12. Soit un réel $\alpha > 0$ et $m-1 < \alpha \leqslant m$. On pose alors, sous réserve d'existence, $D_*^\alpha f := J^{m-\alpha} \circ D^m f$, i.e.

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{f^{(m)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}}\mathrm{d}u & \text{si} \quad m-1<\alpha<m, \\ D^m f(t) & \text{si} \quad \alpha = m. \end{cases}$$

a. Soit une fonction f de classe C^m, telle que $D_*^\alpha f$ soit bien définie et égale à la fonction nulle. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$.

b. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, et soit $0<\alpha<1$. Montrer que $(D\circ J^\alpha)f(x)=(J^\alpha\circ D)f(x)+f(0)\Phi_\alpha(x)$.

c. Soit $m-1<\alpha<m$ et soit f de classe C^m sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles. Sous réserve d'existence de tous les termes, montrer que :

$$D^\alpha f(x)=D_*^\alpha f(x)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0).$$

d. En déduire que $D^\alpha\left(f(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)=D_*^\alpha f(x)$.

C – Deux équations différentielles fractionnaires

13. Pour $0<\alpha<1$, l'équation d'Abel en g est :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{g(u)}{(t-u)^{1-\alpha}}\mathrm{d}u=f(t),$$

où f est une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ et d'ordre exponentiel.

a. Exprimer g en fonction de f à l'aide de l'opérateur D^α.

b. On suppose que g est d'ordre exponentiel. Exprimer la transformée de Laplace de g en fonction de celle de f.

14. Pour $\alpha\geqslant 0$ on introduit la série entière :

$$E_\alpha(\theta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\theta^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

a. Calculer $E_0(\theta)$, $E_1(\theta)$ et $E_2(-\theta^2)$.

b. Montrer que le rayon de convergence de $E_\alpha(\theta)$ est strictement positif.

c. On pose $e_\alpha(t)=E_\alpha(-(t^\alpha))$ et on admet qu'il est d'ordre exponentiel. Montrer que pour $s>1$, on a $\mathcal{L}(e_\alpha)(s)=\dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}$.

d. On pose $u_k:=J^ke_\alpha$. Montrer que $\mathcal{L}(u_k)(s)=\dfrac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha+1}$.

15. On cherche à résoudre l'équation $D_*^\alpha u=-u$. Montrer qu'après application de l'opérateur J^α, cette équation devient :

$$u(t)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k\frac{t^k}{k!}-J^\alpha u(t),$$

où on précisera les c_k.

16. On suppose que u est d'ordre exponentiel. Montrer que :

$$\mathcal{L}(u)(s)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{s^{k+1}}-\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}(u)(s),$$

et en déduire que $u=\sum_{k=0}^{m-1}c_ku_k$.