À rendre pour le jeudi 29 février

DM NORMAL

Notations et objectifs

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x|y)$ et $||x||$.
$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
La matrice transposée d'une matrice A est notée A^T.
Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est autoadjoint.
L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution* et la troisième partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

Partie I

I.1 a) Soit x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Montrer que $(x|y) = X^T Y = Y^T X$.
b) Écrire en PYTHON une fonction `scal(x,y)` qui à deux listes de réels $x = [x_1, ..., x_n]$ et $y = [y_1, ..., y_n]$ associe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. En renverra un message d'erreur si les listes ne sont pas de même taille.
I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, ..., e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.
a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_k)$.
b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur de $z \in F$, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F, M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i E_i^T Z$.

ii) En déduire $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i E_i^T$.

c) Montrer que pour tout $z \in F, ||p(z)|| \leqslant ||z||$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbf{R}^4$.
b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.
I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^{\perp}$.
b) Établir l'égalité : $\lambda ||u||^2 = ||r(u)||^2$.
c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.
I.5 On suppose dans cette question uniquement que p et r commutent.
a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.
b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.
c) Montrer que : $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$.
I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :
$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m - k$.
a) Montrer que les matrices vérifient les relations :
$A^2 + BC = A, AB + BD = B, CB + D^2 = D, A^T = A, B^T = C, D^T = D.$
b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.
(ii) $C^T C = 0$.
(iii) $C = 0$.
(iv) p et r commutent.
I.7 Écrire en PYTHON une fonction `p(M)` qui permet de dire si une matrice M est la matrice d'une projection orthogonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On utilisera aucune fonction prédéfinie, il faudra reprogrammer le produit matriciel, la transposition, la création de matrice comportant que des 0,...

Partie II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.
II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$||f(x_0) - v|| = \min_{x \in E} ||f(x) - v||$$

Dans la suite x_0 sera appelée une pseudo-solution de l'équation :

$$f(x) = v \tag{1}$$

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation (1) admet une pseudo-solution unique.
II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, pour tout x appartenant à E : $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$.
II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$.
Écrire sous forme matricielle l'équation $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, :

$$A^T A X_0 = A^T V$$

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E = F = \mathbf{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.
II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n), c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ de $\mathbf{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.
b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?
c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbf{R}^n$.

Partie III

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.
III.1 a) Soit y un élément de F. Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y', (x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

b) Montrer qu'un tel couple est unique. On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x.
c) Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo inverse* de f .
III.2 Déterminer le noyau et l'image de g.
III.3 a) Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\operatorname{Im} f$.
III.4 Premier exemple : On prend $E = \mathbf{R}^3, F = \mathbf{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel. La matrice de f relativement aux bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.
III.5 Dans cette question, on suppose que $E = F$ et que f est un endomorphisme autoadjoint.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g. (On pourra discuter suivant que la valeur propre associée est nulle ou non).
c) En déduire que g est aussi un endomorphisme autoadjoint de E.
III.6 Deuxième exemple : On prend $E = F = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de f relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique.

DM DIFFICILE

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère un espace euclidien E de dimension n. On note $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.
Pour $u \in L(E)$, on note $u^\star$ son adjoint, χ_u son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}\,(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres. On note π_u le générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de u dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1.
π_u est appelé polynôme minimal de u.
L'endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque $u^\star = -u$.
On note $S(E)$, $A(E)$ et $O(E)$ les sous-ensembles de $L(E)$ formés respectivement des endomorphismes autoadjoints, antisymétriques, des isométries vectorielles.
Si F est un sous-espace de E stable par u, on note $u_{|F}$ l'endomorphisme de F induit par u.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^\star$ soit un polynôme en u et $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathcal{P}(E) = \{u \in \ L(E) \mid u^\star \in \mathbb{R}[u]\}, \mathcal{N}(E) = \{u \in \ L(E) \mid (u^\star \circ u = u \circ u^\star)\}.$$

Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{N}(E)$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et S_n, A_n et O_n les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_A son polynôme caractéristique et π_A son polynôme minimal, c'est-à-dire le polynôme minimal de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On note A^T la transposée de A.
Deux matrices A et B sont dites orthogonalement semblables lorsqu'il existe $P \in \ O_n$ tel que $B = P^{-1}AP$.
On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A^T peut s'exprimer comme un polynôme en A, donc :

$$\mathcal{P}_n = \left\{A \in \ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T \in \ \mathbb{R}[A]\right\}, \text{ et de manière analogue}$$
$$\mathcal{N}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = AA^T\right\}.$$

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I - Généralités $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}_n$

1. **a.**

i. Soient A et B les deux matrices d'un même endomorphisme de E rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

ii. Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice sur $\mathcal{B}$, une base orthonormale de E. Établir un rapport entre l'appartenance de u à $\mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{N}(E)$) et l'appartenance de A à $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{N}_n$).
Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.

iii. Montrer que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{N}(E)$ et que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

iv Écrire un programme en PYTHON qui permet de dire si une matrice est dans $\mathcal{N}_n$ (on n'utilisera pas de fonctions prédéfinies en PYTHON).

b.

i. Vérifier que $S(E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $A(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

ii. Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à $\mathcal{P}_n$?
En déduire que si $n \geq 2$, on a $\mathcal{P}(E) \neq L(E)$.

iii. Soit $u \in \ L(E)$ admettant, sur une certaine base $\mathcal{B}$ de E, une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E, telle que les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ soient triangulaires supérieures.
Montrer que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure.
En déduire les éléments $u \in \mathcal{P}(E)$ qui sont trigonalisables.

iv. On suppose que u est un automorphisme de E ; montrer que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En déduire que u^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en u.
En déduire que $O(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

c.

i. Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ et $A \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note P_A, tel que $\deg P_A < \deg \pi_A$ et $P_A(A) = A^T$.
Si A est la matrice nulle, on convient que P_A est le polynôme nul.
Énoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathcal{P}(E)$.

ii. Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles P_A est un polynôme constant.

iii. Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles P_A est du premier degré.

iv. Soient A et B deux matrices orthogonalement semblables.
Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ alors $B \in \mathcal{P}_n$ et $P_A = P_B$.

d. Décrire les éléments A de $\mathcal{P}_2$ et calculer les P_A correspondants.

e. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{P}_{n_1}$, $A_2 \in \mathcal{P}_{n_2}$. On suppose que π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux.

i. Montrer l'existence de deux polynômes U et V tels que :
$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})\,U\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})\,V\pi_{A_2}.$$
Calculer A^m pour m entier positif quelconque, puis $P(A)$ pour $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})\,U\pi_{A_1}$.
En déduire que $A \in \mathcal{P}_{n_1+n_2}$.

ii. Expliciter π_A en fonction de π_{A_1} et π_{A_2}.
Comment trouver P_A connaissant π_{A_1}, π_{A_2} et le polynôme P défini par $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})\,U\pi_{A_1}$?

f. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A \in \mathcal{P}_4$ et calculer P_A avec la méthode précédente.

Partie II - Étude de $\mathcal{N}(E)$ et $\mathcal{N}_n$

2. ***a.*** Montrer que si $u \in \mathcal{N}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \in \mathcal{N}(E)$.

b. Soient $u \in \mathcal{N}(E)$ et $x \in E$. Montrer que u et $u^\star$ ont le même noyau.

c. Soit m un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme f antisymétrique inversible de l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique.

i. Montrer que m est pair.

ii. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $\Pi = \mathrm{Vect}\,(x_0, f(x_0))$ soit un plan stable par f (on montrera que f^2 est un endomorphisme autoadjoint).
Donner une base orthonormale de Π et exprimer la matrice de $f_{|\Pi}$ relative à cette base.

iii. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \text{ avec } \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b_i \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

d. Soit $u \in L(E)$ et $E_1 \subset E$ un sous-espace stable par u et $u^\star$. On note E_2 le supplémentaire orthogonal de E_1.

i. Montrer que E_2 est stable par u et $u^\star$.

ii. Montrer que $\left(u_{|E_1}\right)^\star = u^\star{}_{|E_1}$.

iii. Montrer que si, en outre, $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $u_{|E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$ et $u_{|E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

Jusqu'à la fin de la partie II, u désigne un élément de $\mathcal{N}(E)$.

e. Montrer que u et $u^\star$ ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.

Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre associé. Soit F le supplémentaire orthogonal du sous-espace :

$\bigoplus_{\lambda} E_u(\lambda)$, où la somme porte sur l'ensemble des valeurs propres de u.

Montrer que F est stable par u et $u^\star$. En considérant la restriction de u à F, montrer que la dimension de F ne peut être impaire. On notera $\dim F = 2p$.

f. On suppose que p est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(F)$. On pose

$$s = \frac{v+v^\star}{2} \text{ et } a = \frac{v-v^\star}{2}.$$

i. Justifier que le polynôme caractéristique de s est scindé.On le note :

$$\chi_s(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{n_i}.$$

ii. Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.

Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de v dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

avec, pour $i = 1, \dots, k$, M_i de la forme $\lambda_i I_{n_i} + A_i$ où A_i est antisymétrique.

iii. On suppose en outre que v n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les A_i sont inversibles.

g. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix} \text{ avec } D \text{ matrice diagonale, } \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \text{ et } b_i \neq 0$$

pour $i = 1, \dots, p$.

h. Donner une caractérisation des matrices $A \in \mathcal{N}_n$.

i. Préciser la matrice obtenue dans **2.g.** quand $u \in O(E)$.

Partie III - Relation entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{N}_n$

3. ***a.*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

i. Soit

$$\Delta = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix} \text{ une matrice réelle diagonale par blocs.}$$

Montrer que $P(\Delta) = \Delta^T$ si et seulement si $P(M_i) = M_i{}^T$, pour $i = 1, \dots, k$.

ii. Donner les expressions de P_A, χ_A et π_A pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } b \neq 0.$$

Montrer que $P(A) = A^T$ si et seulement si $P(a+ib) = a - ib$ et $P(a - ib) = a + ib$.

Dans les questions qui suivent, on fixe $A \in \mathcal{N}_n$. D'après **2.h.**, A est orthogonalement semblable à une matrice B telle que celle représentée **2.g.**.

iii. Montrer que $P(A) = A^T$ si et seulement si :

$$\begin{cases} P(\lambda) = \lambda \text{ pour toute valeur propre réelle } \lambda \text{ de } A \\ P(z) = \overline{z} \text{ pour toute racine complexe non réelle } z \text{ de } \chi_A \end{cases}$$

iv. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré minimal, vérifiant les conditions ci-dessus (sur $P(\lambda)$ et $P(z)$) et que ce polynôme est, en fait, à coefficients réels.

En déduire que $\mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$.

b. Montrer que le polynôme P trouvé dans **3.a.iii.** est, en fait, P_A.

Retrouver, avec la méthode précédente, le polynôme P_A de la question**1.f.**

c. Dans cette question, on suppose $n\geq 3$ et on note $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante

$$C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix} \text{ et } J = C(0, 1, 0, \ldots, 0).$$

i. Montrer que $J \in \mathcal{P}_n$.
   En déduire que toute matrice circulante appartient à $\mathcal{P}_n$.

ii. À toute matrice circulante non nulle $A = C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, on associe les polynômes

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \text{ et } Q(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^{n-i}.$$

   Donner l'expression de π_J. Comparer Q et le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J.

   En déduire les étapes d'une méthode de calcul de P_A. Détailler le calcul pour $A = C(1, 1, 0)$.

d. Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un entier $n\geq 3$ et une matrice $A \in \mathcal{P}_n$ telle que $P = P_A$ si et seulement si $(a_1 - 1)^2 - 4a_0 a_2 \in [0, 4[$.

Indication : montrer que, si n et A existent, χ_A admet au moins une racine réelle et exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.