À rendre pour le mardi 12 mars

DM NORMAL

Notations

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0,+\infty[$.
- Si I est un intervalle réel non réduit à un point, on note $C^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est noté
$$X=(x_k)_{1\leq k\leq n}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $A=(a_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$ où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k.
- On dit qu'une application $M\ :\ t\in I\mapsto M(t)=(a_{j,k}(t))_{1\leq j,k\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de classe C^1 sur I si toutes les fonctions $a_{j,k}$ le sont et dans ce cas on note $M'(t)$ la matrice $(a'_{j,k}(t))_{1\leq j,k\leq n}$.
- On dit qu'une application $M\ :\ t\in I\mapsto M(t)=(a_{j,k}(t))_{1\leq j,k\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ (inclus dans I) si toutes les fonctions $a_{j,k}$ le sont et dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^b M(t)dt$ la matrice $\displaystyle\left(\int_a^b a_{j,k}(t)dt\right)_{1\leq j,k\leq n}$.

Soit I un intervalle réel non réduit à un point et $A\ :\ I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue. Dans ce problème, on s'intéresse au système différentiel

$$X'(t)=A(t)X(t)\tag{E}$$

où $X\ :\ I\to\mathbb{C}^n$ est une application de classe C^1.

A l'exception de la question I.2 utilisée tout au long du sujet, les trois parties sont indépendantes

I. Quelques exemples d'étude d'un système différentiel

I.1 Qu'affirme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire quant à la structure de l'ensemble des solutions de (E) ?

I.2 Vecteurs propres communs

On suppose qu'il existe un vecteur non nul $V\in\mathbb{C}^n$ et une fonction continue $\lambda\ :\ I\to\mathbb{C}$ tels que pour tout $t\in I$ on ait
$$A(t)V=\lambda(t)V$$
Montrer que la fonction
$$X\ :\ t\in I\mapsto\alpha(t)V\in\mathbb{C}^n$$
est solution de (E) si et seulement si la fonction α est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera et pour laquelle on donnera une expression des solutions.

I.3 Un premier exemple

On suppose pour cette question que $n = 2$. Soient a et b deux complexes tels que $a - 1 - b \neq 0$. On suppose que, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, on a

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (E).

I.4 Un deuxième exemple

On suppose également pour cette question que $n = 2$. Soient μ une constante complexe et a, b des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$, la fonction b ne s'annulant jamais sur I. On suppose que pour tout réel $t \in I$, on a

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & \mu b(t) \\ b(t) & a(t) + (\mu - 1)b(t) \end{pmatrix}$$

I.4.1 Traiter le cas particulier où $\mu = 1$ (on pourra chercher les valeurs propres et une base vecteurs propres de $A(t)$ et utilliser la question **I.2**).

I.4.2 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que $A(t)$ ait deux valeurs propres distinctes pour tout t de I.

On supposera cette condition vérifiée pour les deux questions suivantes.

I.4.3 Montrer qu'il existe deux vecteurs indépendants V_1 et V_2 dans $\mathbb{C}^2$ et deux fonctions continues λ_1 et λ_2 de I dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in I$ on ait

$$A(t)V_1 = \lambda_1(t)V_1 \quad \text{et} \quad A(t)V_2 = \lambda_2(t)V_2$$

I.4.4 Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (E).

II. Etude de deux fonctions

On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II.1 Montrer que les fonctions

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\cos(tx)}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{et} \quad v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin(tx)}{\sqrt{x}}\, dx$$

sont bien définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II.2 Montrer que la fonction $w = u + iv$ est solution d'une équation différentielle, puis en déduire que $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{E_1}$$

où la fonction matricielle $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est à déterminer.

II.3 Déterminer, pour tout réel t, les valeurs propres complexes et les sous-espaces propres de $A(t)$.

II.4 Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ du système (E_1). En déduire la solution générale de (E_1).

II.5 Calculer $u(0)$ et $v(0)$ et en déduire l'expression réelle de u et de v.

III. Développement en série entière des solutions pour A constante

III.1 Norme matricielle induite

On se donne une norme vectorielle $X \mapsto \|X\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on lui associe la fonction N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

III.1.1 Montrer que l'application N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.1.2 Montrer que, pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$N(AB) \leq N(A)N(B)$$

III.2 Développement en série entière des solutions

III.2.1 On suppose pour cette question que $I = \mathbb{R}$ et que la fonction A est constante. Montrer que si X est solution de (E), elle est alors de classe C^∞ sur I et que pour tout entier naturel k, on a

$$X^{(k)}(t) = A^k X(t)$$

avec la convention que $X^{(0)} = X$ et $A^0 = I_n$.

III.2.2 On note $X_0 = X(0)$. Montrer que pour tout entier naturel p et tout réel $t \in I$ on a

$$X(t) = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} A^k \right) X_0 + \int_0^t \frac{(t-u)^p}{p!} A^{p+1} X(u)\, du$$

II.2.3 Montrer que

$$X(t) = \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} A^k \right) X_0$$

et en déduire que les coordonnées de X sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

III.3 Un exemple

On suppose pour cette question que $n = 4$, $I = \mathbb{R}$ et que la fonction $t \mapsto A(t)$ est constante égale à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$$

III.3.1 Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A est $X(X-1)^3$.
Montrer que $P_A(A) = A(A - I_4)^3 = 0$.

III.3.2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$, puis exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par $P_A(X)$ dans cette base.

III.3.3 En déduire, pour tout entier $k \geq 1$, une expression de A^k en fonction de A, $A(A - I_4)$ et $A(A - I_4)^2$.

III.3.4 Calculer $A(A - I_4)$ et $A(A - I_4)^2$.

III.3.5 Préciser le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(n-1)$$

ainsi que sa somme.

III.3.6 Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$. déterminer la solution du problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} X' & = & AX \\ X(0) & = & X_0 \end{cases}$$

Dans tout l'énoncé, p désigne un nombre entier strictement positif et $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *solution de l'équation de réplication de matrice A*, toute application $f : t \mapsto \big(f_1(t), f_2(t), \cdots, f_p(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, donc les composantes f_1, $f_2, \cdots$, f_p sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_i'(t) = \big\langle e_i - f(t)\,,\ A\,f(t)\big\rangle\ f_i(t)} \qquad (1),$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$ et $A\,f(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice colonne dans la base canonique est la matrice-produit $A \times \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{pmatrix}$.

L'objet du problème est d'étudier la trajectoire des solutions de (1) et en particulier leurs limites en $+\infty$.

Partie I : solutions de l'équation de réplication scalaire

Dans le cas où p est égal à 1, les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ne possèdent qu'un seul coefficient et l'équation (1) se réduit à une équation différentielle scalaire, non linéaire, dont l'étude fait l'objet de cette partie.

Soit a un nombre réel différent de 0.
On se propose de montrer que, pour tout réel $y \in]0, 1[$, il existe une unique fonction x définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$ vérfiant :

$$\begin{cases} x(0) = y \\ \forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = a\,\big(x(t)\big)^2\,\big(1 - x(t)\big) \end{cases} \qquad (2).$$

1. On note φ l'application définie sur $]0, 1[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \qquad (3).$$

- **a.** Justifier que φ est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Donner l'allure du graphe de φ.
- **c.** Les fonctions φ et φ^{-1} sont-elles lipschitiziennes ?

2.
- **a.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{f'(u)}{\big(f(u)\big)^2\,\big(1 - f(u)\big)}\,du$ à l'aide des fonctions φ et f, de t et de $f(0)$.
- **b.** Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'unique fonction x définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, qui vérifie (2) est la fonction f_y donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_y(t) = \varphi^{-1}\big(a\,t + \varphi(y)\big).$$

3. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme.

- **a.** Démontrer que l'application Φ qui associe à tout élément y de $]0, 1[$ la fonction f_y est une application continue de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- **b.** On note $\mathcal{S} = \{f_y\,;\ y \in]0, 1[\}$.
  Justifier que $\mathcal{S}$ est une partie connexe par arcs de l'espace normé $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  $\mathcal{S}$ est-elle une partie ouverte de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? En est-elle une partie fermée ?

Partie II : étude du cas où $p = 2$

Dans cette partie, on suppose que p est égal à 2 et on note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Soit $x_0 \in]0,1[$. On admet qu'il existe une unique application $f : t \mapsto \big(f_1(t), f_2(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant (1) et telle que :

$$\begin{cases} f_1(0) = x_0 \\ f_2(0) = 1 - x_0 \end{cases} \qquad (4)\ .$$

1. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que g et sa dérivée g' admettent chacune une limite finie en $+\infty$.

Démontrer que la limite de la dérivée g' en $+\infty$ est nécessairement nulle.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et H une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

On considère une fonction $x : t \mapsto x(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = h(t)\, x(t).$$

- ***a.*** Donner, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $x(t)$ en fonction de $x(0)$ et deux valeurs de la fonction H.
- ***b.*** Que peut-on en déduire sur le signe de la fonction x si $x(0)$ n'est pas nul ?

3. ***a.*** Justifier, pour tout réel t, l'égalité :

$$f_1'(t) + f_2'(t) = \big\langle f(t)\,,\, A\, f(t)\big\rangle \big(1 - f_1(t) - f_2(t)\big).$$

- ***b.*** Justifier que $f_1(t) + f_2(t)$ est égal à 1 pour tout réel t.

4. On suppose dans cette question que c est égal à d.

- ***a.*** Utiliser les résultats de la partie I pour exprimer f_1 à l'aide de la fonction φ.
- ***b.*** En déduire la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ selon les valeurs de a et de b.

5. On suppose dans cette question que a et d sont égaux et non nuls, et que b et c sont nuls, autrement dit : $A = a\, I_2$ avec $a \neq 0$.

- ***a.*** Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1'(t) = a\, f_1(t)\, \big(1 - f_1(t)\big)\, \big(2\, f_1(t) - 1\big).$$

- ***b.*** On suppose dans cette sous-question que x_0 est strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

  i Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{1}{2} < f_1(t) < 1$.
  ii En déduire que $f_1(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$.
  iii Trouver, selon le signe de a, la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

- ***c.*** Étudier la convergence de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$ dans le cas où $x_0 < \dfrac{1}{2}$.

Partie III : inégalité de Pinsker (FACULTATIVE)

On pourra admettre la dernière question de cette partie pour la partie IV.

1. On considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \quad K(x,y) = x\, \ln\!\Big(\frac{x}{y}\Big) + (1-x)\, \ln\!\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) \qquad (5)\ .$$

- ***a.*** En utilisant la concavité de la fonction ln, démontrer que la fonction K est minorée. Est-elle majorée ?
- ***b.*** Justifier que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\times]0,1[$ et calculer les dérivées partielles $\partial_1 K$ et $\partial_2 K$.
- ***c.*** En déduire les points où la fonction K atteint sa borne inférieure.

d. Justifier l'inégalité :

$$x\,\ln(\frac{x}{y}) + (1-x)\,\ln(\frac{1-x}{1-y}) \geqslant 2\,(x-y)^2 \qquad (6)\ .$$

2. Pour toute partie D de $[\![1,p]\!]$ et tout vecteur $x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note :

$$x_D = \begin{cases} \sum_{i\in D} x_i & \text{si } D\neq\emptyset \\ 0 & \text{si } D=\emptyset \end{cases}.$$

Soit $x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ et $y=(y_1,y_2,\cdots,y_p)$ deux éléments de ${\mathbb{R}_+^*}^p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} y_i = 1.$$

On note $B_+ = \{i\in[\![1,p]\!] \mid x_i > y_i\}$ et $B_- = \{i\in[\![1,p]\!] \mid x_i \leqslant y_i\}$.

a. Exprimer $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|$ en fonction de x_{B_+} et y_{B_+}.

b. Dans le cas où B_+ et B_- ne sont pas vides, justifier l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{p} x_i\,\ln(\frac{x_i}{y_i}) \geqslant x_{B_+}\,\ln(\frac{x_{B_+}}{y_{B_+}}) + (1-x_{B_+})\,\ln(\frac{1-x_{B_+}}{1-y_{B_+}}).$$

c. En déduire l'inégalité, dite de Pinsker, qui généralise l'inégalité (6) :

$$\sum_{i=1}^{p} x_i\,\ln(\frac{x_i}{y_i}) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i-y_i|\right)^2 \qquad (7)\ .$$

Partie IV : convergence vers un point de coordonnées strictement positives

On note

$$\Delta = \{(x_1,\cdots,x_p)\in{\mathbb{R}_+}^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i = 1\} \text{ et } \Delta^0 = \{(x_1,\cdots,x_p)\in{\mathbb{R}_+^*}^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i = 1\}.$$

Soit f une solution de l'équation de réplication (1) telle que $f(0)$ appartienne à Δ^0, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \forall i\in[\![1,p]\!],\ f_i(0)>0 \\ f_1(0)+f_2(0)+\cdots+f_p(0)=1 \end{cases}.$$

1. Justifier les deux assertions :

a. $\forall t\in\mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i(t) = 1.$

b. f est à valeurs dans Δ^0.

On suppose désormais qu'il existe un vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_p^*)\in\Delta^0$ tel que :

$$\forall x\in\Delta\backslash\{x^*\},\ \langle x^*-x\,,\,A\,x\rangle > 0 \qquad (8)\ .$$

2. On note Q la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[^p$ par :

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)\in]0,1[^p,\ Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^*\,\ln(\frac{x_i^*}{x_i}) \qquad (9)\ .$$

a. Justifier que $Q(x)$ est positif ou nul pour tout $x\in\Delta^0$.

b. Justifier que x^* est l'unique élément x de Δ^0 tel que $Q(x)=0$.

c. Pour tout $x\in\Delta^0$, justifier les inégalités :

$$Q(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^*}{x_i}\,(x_i^*-x_i) \leqslant \frac{1}{\min(x_1,x_2,\cdots,x_p)}\left(\sum_{i=1}^{p}(x_i-x_i^*)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. **a.** Justifier que la fonction composée $Q \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f, A et x^*.

b. En déduire que $Q \circ f$ admet une limite positive ou nulle ℓ en $+\infty$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif ε tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i(t) \geqslant \varepsilon \qquad (10)\ .$$

a. Justifier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \big(f_i(t) - x_i^*\big)^2 \geqslant \varepsilon^2 \,\ell^2$.

b. Justifier que, pour tout réel strictement positif α, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \Delta,\ \big(\langle x - x^*\,,\, x - x^*\rangle\ \geqslant \alpha\big) \Longrightarrow \big(\langle x - x^*\,,\, A\,x\rangle\ \geqslant \beta\big).$$

c. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que la limite ℓ de $Q \circ f$ en $+\infty$ est nulle.

d. Démontrer que $f(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.

5. Un exemple.

Dans cette question, on suppose $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier l'existence d'un unique vecteur x^* vérifiant (8) et le trouver *(on pourra chercher parmi les vecteurs propres)*.

b. Démontrer que la fonction $t \mapsto f_1(t)\, f_2(t)\, f_3(t)$ est croissante.

c. Justifier que $f(t)$ tend vers x^* quant t tend vers $+\infty$.