À rendre pour le mardi 26 mars

DM NORMAL

PROBLÈME 1

Soit (E) l'équation aux dérivées partielles :

$$2y\phi(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Préliminaires

1. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. On note argth la fonction définie de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$, réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$.

3. Montrer que argth est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$ et exprimer sa dérivée.

Première partie

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Déterminer D l'ensemble de définition de f et montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(1-y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y)$ pour (x,y) dans D, puis démontrer que f est une solution de (E) sur D.

Deuxième partie

1. Soient Ω et Ω' les ouverts de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y < x\}$$

$$\Omega' = \{(U,V) \in \mathbb{R}^2,\ U^2 > 4V\}$$

On considère l'application Ψ de Ω dans $\mathbb{R}^2$ $\Psi : (x,y) \mapsto (x+y, xy)$.

a. Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$

b. Montrer que Ψ réalise une bijection de Ω sur Ω'. Déterminer Ψ^{-1} et en déduire que Ψ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur Ω'.

2. Soit k une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω

a. Montrer qu'il existe une application $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega' & \to & \mathbb{R}^2 \\ (U,V) & \mapsto & h(U,V) \end{array} \right.$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω' telle que :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ k(x,y) = h(x+y, xy).$$

b. Montrer que les deux relations suivantes sont équivalentes :

i) $\forall (x,y) \in \Omega,\ \dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y)$

ii) $\forall (U,V) \in \Omega',\ \dfrac{\partial h}{\partial V}(U,V) = 0.$

3. Soit H une solution de (E) sur $\Omega_1 = \{(x,y) \in]-1,1[^2 / y < x\}$ et G définie sur Ω par

$$G(u,v) = (1 - \operatorname{th}^2(v))H(\operatorname{th}(u), \operatorname{th}(v)).$$

a. Montrer que G est bien définie sur Ω.

b. Calculer $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ à l'aide des dérivées partielles de H.

c. Déduire de la question 2. de cette partie qu'il existe une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \Omega_1,\ H(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Indication : On pourra transformer cette égalité en posant $x = \operatorname{th}(u)$ *et* $y = \operatorname{th}(v)$ *sachant que la fonction th est une bijection* $\mathcal{C}^1$ *et de fonction réciproque* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-1,1[$ *et que* $\operatorname{th}(u+v) = \frac{\operatorname{th}(u)+\operatorname{th}(v)}{1+\operatorname{th}(u)\operatorname{th}(v)}$

4. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur Ω_1.

PROBLÈME 2 (Facultatif à partir de la question 7)

Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit l'application linéaire $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{array} \right.$.

On note $\mathcal{N} = \operatorname{Ker}(D)$.

- Si u est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on notera $u = (u_1, ..., u_n)$, avec $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ représentant les applications coordonnées.
- Si de plus u est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on note sa matrice jacobienne $J_x(u) = \left[\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right]_{1 \le i,j \le n}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$.
- Enfin si f est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on note sa matrice hessienne $H_x(f) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{1 \le i,j \le n}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$.

u désignera un fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui laisse $\mathcal{N}$ stable :
$\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ D(f) = 0 \Rightarrow D(f \circ u) = 0$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{N} \Rightarrow f \circ u \in \mathcal{N}$.

1. Montrer que les applications composantes de u appartiennent à $\mathcal{N}$. Pour montrer que $D(u_k) = 0$, on pourra considérer $f_k : x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_k$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

a. Exprimer $\dfrac{\partial (f \circ u)}{\partial x_i}$ en fonction des $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ et de u.

b. En appliquant deux fois cette relation, montrer que :

$$\frac{\partial^2 (f\circ u)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\right)\circ u + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\circ u.$$

c. Interpréter l'ensemble de ces égalités pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ comme une identité matricielle qui exprimer $H_x(f\circ u)$ en fonction de $J_x(u)^T, H_{u(x)}(f), J_x(u)$ et des $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}[u(x)]$ et $H_x(u_k)$ (on pourra calculer $J_x(u)^T H_{u(x)}(f) J_x(u)$).

3. **a.** Montrer que $(U, V) \mapsto tr(UV)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ tr(V_1 S) = 0 \Rightarrow tr(V_2 S).$$

Déduire de la question précédente qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$, tel que $V_2 = \lambda V_1$.

4. Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

a. Montrer que $Df(x) = tr(AH_x(f))$.

b. Montrer que $D(f\circ u)(x) = tr(AJ_x(u)^T H_{u(x)}(f)J_x(u))$.

5. **a.** Soit $S = [S_{i,j}]_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $q(x_1, ..., x_n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{i,j}x_i x_j$.

Montrer que $H_x(q) = S$, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

b. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. En considérant dans la question **3.b.** $V_1 = A$, $V_2 = J_x(u)^T A(f) J_x(u)$ et $f = q$, montrer qu'il existe $\lambda(x)\in\mathbb{R}$ tel que : $J_x(u)AJ_x(u)^T = \lambda(x)A$.

c. En déduire que : $\forall f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), \forall x\in\mathbb{R}^n,\ D(f\circ u)(x) = \lambda(x)Df[u(x)]$.

On suppose jusqu'à la fin du problème que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, la matrice $J_x(u)$ est inversible et que A est aussi inversible. On note $B = A^{-1} = [b_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$.

6. **a.** Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \lambda(x)\neq 0$.

b. Montrer que λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

c. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ J_x(u)^T B J_x(u) = \lambda(x)B$.

7. Montrer que pour tout $i, j, k\in[\![1, n]\!]$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}b_{k,i} + \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}b_{k,j} - \frac{\partial\lambda}{\partial x_k}b_{i,j}\right),$$

on pourra dériver par rapport à x_k la quantité $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_q}{\partial x_j}$ et écrire

$\dfrac{\partial^2 u_p}{\partial x_k\partial x_i}\cdot\dfrac{\partial u_q}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[\dfrac{\partial u_p}{\partial x_k}\dfrac{\partial u_q}{\partial x_j}\right] - \dfrac{\partial u_p}{\partial x_k}\dfrac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}$.

8. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{i,j}b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j}$, puis montrer que :

$$\forall k\in[\![1, n]\!],\ (n-2)\frac{\partial\lambda}{\partial x_k} = 0.$$

9. On suppose $n\neq 2$.

a. Montrer que λ est constante et en déduire que : $\forall i, j, q\in[\![1, n]\!],\ \dfrac{\partial^2 u_q}{\partial x_i\partial x_j} = 0$.

b. En déduire qu'il existe $a\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b\in\mathbb{R}^n$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ u(x) = a(x) + b$.

c. Montrer que a est dans $GL(\mathbb{R}^n)$.

EXERCICE

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ d'une norme $\|.\|$ matricielle vérifiant :
$\forall U, V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|UV\| \leq \|U\|.\|V\|$ (cela existe toujours en considérant une norme subordonnée).

1. Pour R assez grand, montrer que, pour tout$\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $(Re^{i\theta}I_d - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et que son inverse est la matrice

$$(Re^{i\theta})^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{-n}A^n.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout R assez grand, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta = A^{n-1}.$$

3. On considère la polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI_d - A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Montrer que pour R assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta.$$

4. En déduire que $\chi_A(A) = 0$ (on pourra faire intervenir des comatrices).

PROBLÈME 1

Notations et Définitions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désignera le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^k$ par $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$ par $\|\cdot\|$.
Dans tout le sujet, on se place sur $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

- *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

- *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est **coercive** si $\displaystyle\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$, autrement dit :*

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| > R \Rightarrow f(x) > M$$

I - Préliminaires

Fonctions convexes

I.1. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, soit $\varphi_{x,y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y-x))$$

Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_{x,y}$ est convexe.

(b) On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi_{x,y}$ est dérivable, et montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'_{x,y}(t) = \langle\nabla f(x + t(y-x)), y - x\rangle$$

(c) En déduire que si f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, alors f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

(d) Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, alors f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant 0$$

I.2. Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable sur $\mathbb{R}^n$, et $x^* \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $\nabla f(x^*) = 0$ alors f admet un minimum global en x^*.

Définition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$ est α-**convexe** si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2$$

I.3. On considère un réel $\alpha > 0$ et une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

(a) On considère la fonction $g_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; g_\alpha(x) = f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$$

Calculer $\nabla g_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et montrer que f est α-convexe si et seulement si g_α est convexe.

(b) En déduire que f est α-convexe si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant \alpha\|y - x\|^2$$

Fonctions coercives

I.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et coercive. Montrer que si K est un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe $x^* \in K$ tel que $f(x^*) = \inf\limits_{x \in K} f(x)$.

I.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et α-convexe où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si K est un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, alors f admet un unique minimum sur K.

Projection sur un convexe fermé

I.6. Soient C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer qu'il existe un unique point $P_c(x) \in C$ tel que $\|P_C(x) - x\| = \inf\limits_{y \in C} \|y - x\|$.

(b) Soit $\overline{x} \in C$. Montrer que $\overline{x} = P_C(x)$ si et seulement si

$$\forall y \in C, \; \langle x - \overline{x}, y - \overline{x} \rangle \leqslant 0$$

Indication : on pourra considérer la fonction $\psi_y : t \in \mathbb{R} \mapsto \|x - (\overline{x} + t(y - \overline{x}))\|^2$ où $y \in C$.

(c) En déduire que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|P_C(y) - P_C(x)\| \leqslant \|y - x\|$.

Une première condition nécessaire d'optimalité

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'un vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ est K-admissible au point $x \in K$ s'il existe

- *une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} t_k = 0$,*
- *une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} h_k = h$,*

telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x + t_k h_k \in K$$

On appelle cône K-admissible au point $x \in K$ l'ensemble

$$\mathcal{A}_K(x) := \{h \in \mathbb{R}^n, \; h \;\; \textit{est un vecteur } K \textit{ admissible au point } x\}$$

I.7. Montrer que $\mathcal{A}_K(x) = \mathbb{R}^n$ dans le cas où x est dans l'intérieur de K.

I.8. Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $x^* \in K$ et admet un minimum local sur K en x^*, alors

$$\forall h \in \mathcal{A}_K(x^*),\ \langle \nabla f(x^*), h \rangle \geqslant 0$$

Qu'exprime ce résultat dans le cas particulier où x^* est dans l'intérieur de K ?

PROBLÈME 2

1. Dans toute cette partie, on considère un intervalle fermé I et une fonction f définie sur I à valeurs dans I et qui vérifie, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

où k est une constante positive strictement inférieure à 1.
On dit dans ce cas que la fonction f est contractante sur I.

a. Montrer que si $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, alors $x_1 = x_2$.

b. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à I.

c. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

2. Dans toute cette partie, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

On définit enfin une fonction g sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} f(x, y).$$

a. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule B fermée de centre (a, b) et de rayon $2r$ soit incluse dans U et tel que

$$\forall (x, y) \in B, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

b. En déduire que, pour tout $(x, y) \in B$ et tout $(x, y') \in B$,

$$|g(x, y') - g(x, y)| \leq \frac{1}{2} |y - y'|.$$

c. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I =]a - \alpha, a + \alpha[$, avec $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, a + \alpha] \times [b - r, b + r] \subset B$ et tel que

$$\forall x \in I, \quad |g(x, b) - g(a, b)| \leq \frac{r}{2}$$

d. Déduire des deux dernières inégalités que

$$\forall (x, y) \in I \times [b - r, b + r], \quad g(x, y) \in [b - r, b + r].$$

e. Montrer que pour tout $x \in I$ fixé, l'application $y \longmapsto g(x, y)$ est une application contractante sur $[b - r, b + r]$.

f. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b-r, b+r]$ tel que $f(x,y) = 0$. Ce y sera noté $\varphi(x)$.

g. Montrer que φ est lipschitzienne sur I (on pourra partir de $g(x,y) - g(x_0, y_0)$, avec $y = \varphi(x)$ et $y_0 = \varphi(x_0)$).

h. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur I et donner l'expression de la dérivée de φ en fonction des dérivées partielles de f (on pourra partir de $f(x,y) - f(x_0, y_0)$, avec $y = \varphi(x)$ et $y_0 = \varphi(x_0)$ et utiliser un développement limité à l'ordre un de f).

3. Soit f et F deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert. On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\{(x,y) \in U, f(x,y) = 0\}$. Une solution de ce problème sera appelé extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$.

Soit (a,b) un point de U tel que $f(a,b) = 0$ et tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b) et contenu dans U, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a et une application φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tels que

$$((x,y) \in V, f(x,y) = 0) \Longleftrightarrow (x \in I, y = \varphi(x)).$$

b. Montrer que si (a,b) est un extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$, alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$$

c. La réciproque est-elle vraie ?