Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Espaces vectoriels normés

La relation $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour $k \in \mathbb{R}_+$ peut être utilisée sans démonstration.

Normes

- Définition, normes dérivant d'un produit scalaire.
- Normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
- Distance associée à une norme, distance d'un point à une partie.
- Boules ouvertes, fermées, sphères, les boules sont des parties convexes (définition des parties convexes à ce moment là).
- Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
- Produit d'espaces vectoriels normés.

Suites d'un espace vectoriel normé

- Définition, CV, opérations sur les limites CV dans un espace produit,, suite CV implique suite bornée.
- Suites extraites et valeurs d'adhérence.

Comparaison de normes

- Domination de normes, normes équivalentes.
- Invariance du caractère borné et de la limite d'une suite pour deux normes équivalentes.
- Équivalence des normes en dimension finie, la convergence et la valeur de la limite sont indépendants de la norme choisie en dimension finie.
- En dimension finie, la CV se ramène à celle de ses coordonnées dans une base, exemple de suites de matrices.

Série d'un espace vectoriel normé

- Définition, reste, somme partielle.
- Le terme général d'une série CV converge vers 0, divergence grossière.
- Séries téléscopique, (u_n) CV ssi $\sum(u_{n+1} - u_n)$ CV.
- Linéarité de la somme.
- Absolue convergence. En dimension finie l'absolue CV implique la CV.
- Exponentielle de matrices ou d'endomorphisme d'un ev de dimension finie, $\exp(A+B)$ ou $\exp(u+v)$ quand A et B commutent ou u et v commutent, $P\exp(A)P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$ et $Sp(\exp(A)) = \{e^\lambda,\ \lambda \in Sp(A)\}$.

Topologie d'un espace vectoriel normé

- Points intérieurs, intérieur, partie ouverte, indépendance de la notion d'ouvert par rapport à la norme en dimension finie, toute boule ouverte est un ouvert. A est ouvert ssi $\mathring{A} = A$.
- Points adhérents, adhérence, fermé, caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés, indépendance de la notion de fermé par rapport à la norme en dimension finie, toute boule fermée ou sphère est un fermé. A est fermé ssi $\overline{A} = A$.

- Réunion et intersection d'ouverts et de fermés.
- Voisinage, Frontière, parties denses, topologie induite sur une partie.

Limite et continuité en un point

- Définition, caractérisation séquentielle, limite dans un espace produit, en dimension finie la limite ne dépend pas de la norme, utilisation des coordonnées polaire pour trouver une limite en $(0,0)$.
- Continuité en un point, continuité.
- Limite et continuité et opérations algébriques et composition.
- En dimension finie, la limite ou la continuité d'une fonction se ramènent à celle de ses coordonnées dans une base.
- Fonctions lipschitzienne, unifomément continue et lien avec la continuité.
- Continuité de l'exponentielle de matrice ou d'endomorphimes en dimension finie.
- Fonction polynomiale à plusieurs variables et continuité, continuité du déterminant.
- Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.

Continuité des applications linéaires et multilinéaires

- Toute application linéaire $f : E \to F$ avec E de dimension finie est continue, ce qui équivaut à la continuité en 0 ce qui équivaut à : $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
- Norme triple ou norme subordonnée pour les applications linéaires ou les matrices, la norme triple est une norme sous-multiplicative.
- $f : E_1 \times ... \times E_p \to F$ une application p-linéaire est continue ssi Il existe K dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall (x_1, ..., x_p) \in E_1 \times ... \times E_p,\ \|f(x_1, ..., x_p)\|_F \leq K\|x_1\|_1 \times ... \times \|x_p\|_p$.
- En dimension finie, les application linéaires et multilinéaires sont continues, le produit matriciel et la composition d'applications linéaires en dimension finie sont continues.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 38
- CCINP 40
- CCINP 44
- CCINP 45
- Soit $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour k dans $\mathbb{N}$, on pose $C_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 + \frac{2}{k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n + \frac{n}{k} \end{pmatrix}$.

  1. Montrer que pour k suffisamment grand, les coefficients diagonaux de C_k sont deux à deux distincts.
  2. En déduire que C est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.
  3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.