Correction des exercices du 13/11/2023 (Réduction, topologie)

Ex 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Montrer qu'il existe P dans $GL_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

3. Calculer A^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

4. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X^2 = A$. Montrer que X et A commutent, puis trouver X.

Correction :

1. On a en développant par rapport à la deuxième ligne :
$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ -1 & 1 & X \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(X-2) \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)[X(X-2)+1] =$
$(X-2)(X^2-2X+1) = (X-2)(X-1)^2$.
Ainsi $Sp(A) = \{2, 1\}$.
On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) = \mathrm{Ker}\,(I_n - A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -x+z & = & 0 \\ -y & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & x \\ y & = & 0 \end{array} \right.$.
Ainsi $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi $\dim(E_1(A)) = 1 < m_1$, donc A n'est pas diagonalisable.
Mais χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable.

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) = \mathrm{Ker}\,(2I_n - A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & 0 \\ -x+y-2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & 0 \\ y & = & x \end{array} \right.$.
Ainsi $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Il faut trouver une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que : $AU_1 = 2U_1, AU_2 = U_2$ et $AU_3 = U_2 + U_3$. Ainsi on peut choisir $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On doit avoir $(A - I_3)U_3 = U_2$, donc on doit résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit
$\left\{ \begin{array}{lcl} x-z & = & 1 \\ y & = & 0 \\ x-y-z & = & 1 \end{array} \right.$. On peut choisir $x = 1, y = 0$ et $z = 0$. On pose donc $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a bien $AU_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_2 + U_3$.

Reste à voir si (U_1, U_2, U_3) est bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a une base si et seulement si P est inversible.

Or $\det(P) = 1$ (en développant par rapport à la dernière colonne ou en utilisant la règle de Sarrus). Ainsi (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

3. On note $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On a : $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} P^{-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & U^n \end{pmatrix}$.

On constate que $U = I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi comme $I_2 N = N I_2$, on peut appliquer la formule du binôme :

$U^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_2^{n-k} = I_2^n + \binom{n}{1} I_2^{n-1} N = I_2 + nN$, car $N^2 = 0$, car : $\forall k \geq 2,\ N^k = 0$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a ainsi $A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Or par la méthode du pivot de Gauss, on trouve que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 1 & n+1 \\ 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & 2^n - n - 1 & -n \\ 0 & 2^n & 0 \\ n & -n & 1-n \end{pmatrix}$.

4. Soit X une solution. Ainsi on a : $XA = XX^2 = X^3 = X^2X = AX$.
Ainsi X laisse stable les sous-espaces-propres de A. Comme $E_2(A) = vect(U_1)$ et $E_1(A) = vect(U_2)$, alors : $XU_1 \in E_2(A)$ et $XU_2 \in E_1(A)$, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $XU_1 = aU_1$ et $XU_2 = bU_2$. Ainsi la matrice de l'application canoniquement associée à X dans la base (U_1, U_2, U_3) est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, puis $X = P \begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} P^{-1}$. Ainsi $X^2 = A$, implique que $P \begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, puis : $\begin{pmatrix} a^2 & 0 & x(a+z) \\ 0 & b^2 & y(b+z) \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ceci équivaut à $\begin{cases} a \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \\ b \in \{1, -1\} \\ z \in \{1, -1\} \\ x = 0 \\ y(b+z) = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \\ b \in \{1, -1\} \\ z \in \{1, -1\} \\ a = -z \\ y(b+z) = 1 \end{cases}$. Ce dernier système étant impossible, alors on a : $\begin{cases} a \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \\ b \in \{1, -1\} \\ z \in \{1, -1\} \\ x = 0 \\ y(b+z) = 1 \end{cases}$ et b et z doivent être de même signe à cause de la dernière ligne qui donne $b+z\neq 0$. On a donc : $\begin{cases} a\in\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}\\ b=1\\ z=1\\ x=0\\ y=1/2\end{cases}$ ou $\begin{cases} a\in\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}\\ b=-1\\ z=-1\\ x=0\\ y=-1/2\end{cases}$

Ainsi $X=P\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & b/2\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$, avec $a\in\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$ et $b\in\{1,-1\}$.

Réciproquement, si X est de cette forme, comme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & b/2\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & b^2\\ 0 & 0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

alors $X^2=P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=A$ et donc X est solution.

<u>Ex 2</u> : Soit $E=\left\{f\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})\mid f(0)=f(1)=0\right\}$ et pour $f\in E$, on pose : $N_2(f)=\left(\int_0^1 f''(t)^2\,dt\right)^{1/2}$.
Montrer que N_2 est une norme sur E, puis comparer $\|.\|_\infty$ et N_2.
Correction : Montrons d'abord que N_2 est une norme découlant d'un produit scalaire.
Pour $f,g\in E$, on pose $(f|g)=\displaystyle\int_0^1 f''g''$.
Montrons que $(.|.)$ est un produit scalaire.

- <u>Symétrie :</u> Soient $f,g\in E$. On a $(f|g)=\displaystyle\int_0^1 f''g''=\int_0^1 g''f''=(g|f)$.
- <u>Bilinéarité :</u> Montrons la linéarité à gauche. Soient $f,g,h\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a : $(\lambda f+\mu g|h)=\displaystyle\int_0^1(\lambda f''+\mu g'')h''=\lambda\int_0^1 f''h''+\mu\int_0^1 g''h''=\lambda(f|h)+\mu(g|h)$.
  Comme $(.|.)$ est symétrique, on a aussi la linéarité à droite.
- <u>Positivité :</u> On a : $\forall f\in E,\ (f|f)=\displaystyle\int_0^1 f''(t)^2\,dt\geq 0$.
- <u>Séparation :</u> Soit $f\in E$ telle que : $\displaystyle\int_0^1 f''(t)^2\,dt=0$. Comme $(f'')^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, alors $\forall t\in[0,1],\ f''(t)=0$. Il existe donc $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall t\in[0,1],\ f'(t)=c$, puis il existe donc $d\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall t\in[0,1],\ f(t)=ct+d$. Comme $f(0)=0$, alors $d=0$, puis $0=f(1)=c$. Ainsi $f=0$.

Ainsi $(.|.)$ est un produit scalaire et donc comme : $\forall f\in E,\ N_2(f)=\sqrt{(f|f)}$, alors N_2 est une norme (qui découle d'un produit scalaire).

On suppose qu'il existe $k\in\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall f\in E,\ N_2(f)\leq k\|f\|_\infty$. Soit $n\in\mathbb{N}$, avec $n\geq 2$. On pose $f_n:t\mapsto\sin(n\pi t)$ qui est bien dans E. On a : $\|f_n\|_\infty=1$. Par ailleurs :

$$N_2(f_n)=\sqrt{\int_0^1 n^4\pi^4\sin^2(n\pi t)dt}=n^2\pi^2\sqrt{\int_0^1\frac{1-\cos(n\pi t)}{2}dt}=n^2\pi^2\sqrt{\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1}=\frac{n^2\pi^2}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi $\forall n\geq 2$, $\dfrac{n^2\pi^2}{\sqrt{2}}=N_2(f_n)\leq k\|f_n\|_\infty=1$ et quand n tend vers $+\infty$, on trouve : $+\infty\leq k$, ce qui est absurde. Ainsi N_2 n'est pas dominée par $\|.\|_\infty$.
Soit $f\in E$.
f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $f(0)=f(1)=0$. Ainsi grâce au théorème de Rolle, il existe $c\in]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.
Soit $t\in[0,1]$. On a $|f'(t)|=|\displaystyle\int_c^t f''(u)du+f'(c)|=|\int_c^t 1\times f''(u)du|$.
Si $t\geq c$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$| \int_c^t 1 \times f''(u)du| \leq \sqrt{\int_c^t 1^2du}\sqrt{\int_c^t (f''(u))^2du} \leq \sqrt{\int_0^1 1^2du}\sqrt{\int_0^1 (f''(u))^2du} = 1 \times N_2(f) = N_2(f).$$

Si $t < c$, alors de même : $| \int_c^t 1 \times f''(u)du| = | \int_t^c 1 \times f''(u)du| \leq N_2(f)$.

Ainsi : $\forall t \in [0,1],\ |f'(t)| \leq N_2(f)$.

Soit $t \in [0,1]$. On a :

$$|f(t)| = | \int_0^t f'(u)du + f(0)| = | \int_0^t f'(u)du| \leq \int_0^t |f'(u)|du \leq \int_0^1 |f'(u)|du \leq \int_0^1 N_2(f)du = N_2(f).$$

Ainsi : $\forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leq N_2(f)$, donc : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq N_2(f)$.