Correction des exercices du 20/11/2023 (Topologie)

Ex 1 : On considère la suite (Z_n) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en posant pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et définie par récurrence par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{3}w_n \\ w_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite (Z_n) vérifie une relation matricielle de la forme : $Z_{n+1} = AZ_n + B$.
2. Montrer qu'il existe k dans $[0,1[$ tel que pour tout X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a : $\|AX\|_\infty \leq k\|X\|_\infty$.
3. Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution L.
4. Établir à l'aide d'une récurrence une inégalité concernant $\|Z_n - L\|_\infty$,$\|Z_0 - L\|_\infty$, k et n.
5. Conclure quand à la convergence de (Z_n).

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $Z_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -7/6 \end{pmatrix}$, puis $Z_{n+1} = AZ_n + B$, avec $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -7/6 \end{pmatrix}$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que : $\|X\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$.
On a $AX = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} - \frac{z}{6} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \end{pmatrix}$.
On a : $\left|\frac{x}{3} - \frac{z}{6}\right| \leq \frac{|x|}{3} + \frac{|z|}{6} \leq \frac{\|X\|_\infty}{3} + \frac{\|X\|_\infty}{6} = \frac{3\|X\|_\infty}{6}$.
$\left|\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3}\right| \leq \frac{|x|}{3} + \frac{|y|}{6} + \frac{|z|}{3} \leq \frac{\|X\|_\infty}{3} + \frac{\|X\|_\infty}{6} + \frac{\|X\|_\infty}{3} = \frac{5\|X\|_\infty}{6}$.
$\left|\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right| \leq \frac{|x|}{3} + \frac{|y|}{3} + \frac{|z|}{6} \leq \frac{\|X\|_\infty}{3} + \frac{\|X\|_\infty}{3} + \frac{\|X\|_\infty}{6} = \frac{5\|X\|_\infty}{6}$.
Ainsi $\|AX\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{x}{3} - \frac{z}{6}\right|, \left|\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6}\right|, \left|\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right|\right\} \leq \frac{5\|X\|_\infty}{6}$.
3. $X = AX + B \Leftrightarrow (I_3 - A)X = B$. Or $I_3 - A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. On a $\det(I_3 - A) = 98/6^3 \neq 0$, donc $I_3 - A$ est inversible et $L = (I_3 - A)^{-1}B$
4. On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|Z_n - L\|_\infty \leq k^n\|Z_0 - L\|_\infty$.
Pour $n = 0$, c'est immédiat.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que : $\|Z_n - L\|_\infty \leq k^n\|Z_0 - L\|_\infty$.
On a : $\|Z_{n+1} - L\|_\infty = \|(AZ_n + B - (AL+B)\|_\infty = \|A(Z_n - L)\|\infty \leq k\|Z_n - L\|\infty \leq k^n\|Z_0 - L\|_\infty$, grâce à l'hypothèse de récurrence et la question **2**.

5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|Z_n - L\|_\infty$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = L$.

Ex 2 : Préciser la nature $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq y+7\}$ (ouvert, fermé)

Correction : Soit $f:\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x-y\end{array}\right.$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
On constate que $A=f^{-1}([7,+\infty[)$. Comme $[7,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$, alors $A=f^{-1}([7,+\infty[)$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 3 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ A & A\end{pmatrix}$.

a. Donner une relation entre χ_A et χ_B.

b. Montrer que pour $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{1\}$, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(B)$ sont isomorphes.

c. Montrer que $\mathrm{rg}\,(B-I_{2n})=n$.

d. En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $A-I_n$ est inversible.

Correction :

a. On a : $\chi_B(X)=\det(XI_{2n}-B)=\begin{vmatrix}(X-1)I_n & 0\\ A & XI_n-A\end{vmatrix}=\det((X-1)I_n)\det(XI_n-A)=(X-1)^n\chi_A(X)$, sachant que l'on a pu calculer ainsi le déterminant car on a une matrice triangulaire par blocs.

b. Pour $X,Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :
$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\in E_\lambda(B)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}I_n & 0\\ A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X\\ AX+AY\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}X & =\lambda X\\ AX+AY & =\lambda Y\end{array}\right.\Leftrightarrow$
$\left\{\begin{array}{ll}(1-\lambda)X & =0\\ AX+AY & =\lambda Y\end{array}\right.\underbrace{\Leftrightarrow}_{\lambda\neq 1}\left\{\begin{array}{ll}X & =0\\ AY & =\lambda Y\end{array}\right.\Leftrightarrow[X=0\text{ et }Y\in E_\lambda(A)]$.

Ainsi $E_\lambda(B)=\left\{\begin{pmatrix}0\\ Y\end{pmatrix},\ Y\in E_\lambda(A)\right\}$, et donc l'application $\left\{\begin{array}{lll}E_\lambda(A) & \to & E_\lambda(B)\\ Y & \mapsto & \begin{pmatrix}0\\ Y\end{pmatrix}\end{array}\right.$ est un isomorphisme.

c. On a : $B-I_{2n}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -A & I_n-A\end{pmatrix}$. En effectuant les opérations $C_{i+n}\leftarrow C_{i+n}-C_i$, pour $1\leq i\leq n$, on a $\mathrm{rg}\,(I_{2n}-B)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -A & I_n\end{pmatrix}$. Comme on peut extraire I_n qui est inversible de cette dernière matrice, alors $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -A & I_n\end{pmatrix}\geq n$. Par ailleurs, cette matrice a au plus n lignes non nulles, donc : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -A & I_n\end{pmatrix}\leq n$, puis $\mathrm{rg}\,(I_{2n}-B)=n$.

d. On rappelle que : $\chi_B(X)=(X-1)^n\chi_A(X)$.
On constate donc que $Sp(B)=Sp(A)\cup\{1\}$.
Ensuite χ_B est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_A l'est.
D'une part : $\forall\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{1\},\ m_\lambda(B)=m_\lambda(A)$.
D'autre part on a : $m_1(B)=m_1(A)+n$.
On peut donc établir les équivalences suivantes :
B est diagonalisable si et seulement si
χ_B est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall\lambda\in Sp(B),\ m_\lambda(B)=\dim(E_\lambda(B))$ si et seulement si
χ_B est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall\lambda\in Sp(B)\setminus\{1\},\ m_\lambda(B)=\dim(E_\lambda(B))$ et :
$m_1(B)=\dim(E_1(B))=\dim\mathrm{Ker}\,(B-I_{2n})=2n-\mathrm{rg}\,(B-I_{2n})=n$ si et seulement si

χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall\lambda \in Sp(A)\setminus\{1\},\ m_\lambda(A) = \dim(E_\lambda(A))$ et $m_1(A) = 0$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall\lambda \in Sp(A),\ m_\lambda(A) = \dim(E_\lambda(A))$ et $1 \notin Sp(A)$ si et seulement si A est diagonalisable et $A - I_n$ est inversible ($\det(I_n - A) = \chi_A(1) \neq 0$).

<u>Ex 4</u> : Soit u un endomorphisme diagonalisable de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle commutant de u, noté $\mathcal{C}(u)$, l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $v \circ u = u \circ v$. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$, puis que $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$.

Correction : Soit $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, avec les valeurs propres de u sans répétitions.
On a donc $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(u)$. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ pour i dans $[\![1, p]\!]$ et on notera $n_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$. Ainsi $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p)$ est une base de E. Comme $\forall x \in E_{\lambda_i}(u),\ u(x) = \lambda_i x$, alors

$$D = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p I_{n_p} \end{pmatrix}.$$

Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. On a donc $uv = vu$ et donc v laisse stable les sous-espaces propres de u, donc : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)$. On a donc : $A = Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie : $A = Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$, alors

$$AD = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p A_p \end{pmatrix} = DA,$$ donc $vu = uv$, puis v est dans $\mathcal{C}(u)$.

Cela permet d'établir l'isomorphisme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{C}(u) & \to & \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}) \times ... \times \mathcal{M}_{n_p}(\mathbb{K}) \\ v & \mapsto & (A_1, ..., A_p) \end{array} \right. ,$$

avec $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$.

Ainsi $\dim(\mathcal{C}(u)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$.

D'autre part comme tous les n_i vérifient $n_i \geq 1$, alors $n_i^2 \geq n_i$, puis
$\dim(\mathcal{C}(u)) \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E) = n$, car u est diagonalisable.