Correction des exercices du 27/11/2023 (Topologie, suite de fonctions)

Ex 1 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose
$L(f) : t \mapsto f(0) + t(f(1) - f(0))$.
Montrer que L est un endomorphisme continu de E, puis déterminer $|||L|||$.

Correction : Soit $f \in E$. L'application $t \mapsto f(0)+t(f(1)-f(0))$ est continue sur $[0,1]$, donc : $L(f) \in E$.
Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a : $\forall t \in [0,1],\ L(\lambda f+\mu g)(t) = (\lambda f+\mu g)(0)+t\left((\lambda f + \mu g)(1) - (\lambda f + \mu g)(0)\right) = \lambda\left(f(0) + t(f(1) - f(0))\right) + \mu\left(f(0) + t(f(1) - f(0))\right) = \lambda L(f)(t) + \mu L(g)(t)$, donc :
$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g)$.
Ainsi L est bien un endomorphisme de E.
Soit $f \in E$. On a : $\forall t \in [0,1],\ |L(f)(t)| = |(1-t)f(0) + tf(1)| \leq \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}|f(0)| + \underbrace{t}_{\geq 0}|f(1)| \leq (1-t)\|f\|_\infty + t\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$.
Ainsi $\|L(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, par suite 1 majore $\left\{\dfrac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty},\ f \neq 0\right\}$, donc $|||f||| \leq 1$.
On prend $f = 1$. On a : $\forall t \in [0,1],\ L(f)(t) = 1$, donc $L(f) = 1$, puis $\dfrac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \dfrac{1}{1} = 1$, donc ce majorant 1 de $\left\{\dfrac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty},\ f \neq 0\right\}$ est atteint pour $f = 1$, donc $|||L||| = \sup\left\{\dfrac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty},\ f \neq 0\right\} = 1$.

Ex 2 : Soit $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Correction : Par opérations/compositions, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Passons en coordonnées polaires. On pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $|f(x,y)| = r^2|\sin(1/r^2)| \leq r^2 \underset{r \to 0^+}{\to} 0$. Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Ainsi f est aussi continue en $(0,0)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 3 : Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n), avec $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$

Correction : Pour $x < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(0) = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-nx} = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
La suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = xne^{-nx}(2 - nx)$. Ainsi f_n est croissante sur $[0, 2/n]$ et décroissante sur $[2/n, +\infty[$. Comme f_n est positive, alors : $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n(2/n) = \dfrac{4e^{-2}}{n}$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, donc (f_n) converge uniformément vers 0.

<u>Ex 4</u> : Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé et $A+B=\{a+b,\ a\in A, b\in B\}$.

1. On suppose A ouverte. Montrer que $A+B$ est ouverte.
2. Si A et B sont fermées, a-t-on forcément $A+B$ fermée ?

Correction :

1. Commençons par montrer que pour b un vecteur, $A+\{b\}$ est un ouvert. Soit $x\in(A+\{b\})$. Il existe donc $a\in A$ tel que $x=a+b$. Comme A est un ouvert, alors il existe $r\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r)\subset A$.
Montrons que $B(x,r)\subset(A+\{b\})$. Soit $y\in B(x,r)$. On a $\|y-x\|<r$, soit $\|(y-b)-a\|<r$, donc : $y-b\in B(a,r)$, puis : $y-b\in A$, donc $y=\underbrace{y-b}_{\in A}+b$ est dans $A+\{b\}$.
Ainsi : $\forall x\in(A+\{b\}),\exists r\in\mathbb{R}_+^*,\ B(x,r)\subset(A+\{b\})$, donc $A+\{b\}$ est un ouvert.
On aurait pu montrer cela autrement : soit $f:x\mapsto x-b$. L'application f est lipschitzienne, car : $\forall x,y\in E,\ \|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$. Ainsi f est continue et $A+\{b\}=f^{-1}(A)$ est donc ouvert en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
Dans le cas général, $A+B=\displaystyle\bigcup_{b\in B}(A+\{b\})$ est donc ouvert en tant que réunion (quelconque) d'ouverts.
2. Soit $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=0\}$ et $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy\geq 1\}$. Ce sont deux fermé de $\mathbb{R}^2$. En effet, si on pose $f:(x,y)\mapsto x$ et $g:(x,y)\mapsto xy$, qui sont continues, on a : $F_1=f^{-1}(\{0\})$ et $F_2=g^{-1}([1,+\infty[)$.
On a pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(1/n,0)=(0,-n)+(1/n,n)\in F_1+F_2$. Mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1/n,0)=(0,0)$ qui n'est pas dans F_1+F_2 (sinon, on aurait $(0,0)=(0,z)+(x,y)$, avec $xy\geq 1$, puis $x=0$, ce qui contredit $xy\geq 1$).
Par caractérisation séquentielle F_1+F_2 n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

<u>Ex 5</u> : Étude de la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de f définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{ch}\,(xy)-\cos(xy)}{x^2y^2} & \text{si } xy\neq 0\\ 1 & \text{si } xy=0\end{cases}$.

Correction : On pose $g(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{ch}\,(t)-\cos(t)}{t^2} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ par compositions/opérations. On a aussi : $\dfrac{\mathrm{ch}\,(t)-\cos(t)}{t^2}=\dfrac{1+t^2/2-(1-t^2/2)+o(t^2)}{t^2}=1+o(1)\underset{t\to 0}{\to}1=g(0)$. Ainsi g est bien continue en 0.

On a : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=g(xy)$, donc par compositions/opérations, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.