Correction des exercices du 04/12/2023 (Suites et éries de fonctions)

Ex 1 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}$.

Correction : Soit $n\geq 2$ et on pose $f_n : t\mapsto \dfrac{1}{1+t^n}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement vers $f : t\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\leq t<1 \\ 1/2 & \text{si} \quad t=1 \\ 0 & \text{si} \quad t>1\end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Soit $n\geq 2$. Pour $t\in[0,1]$, on a $|f_n(t)|\leq 1$ et pour $t\in]1,+\infty[$, on a $|f_n(t)|\leq \dfrac{1}{1+t^2}$, car $t^n\geq t^2$, si $t\geq 1$.

  On pose $\varphi : t\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\leq t\leq 1 \\ \dfrac{1}{1+t^2} & \text{si} \quad t>1\end{cases}$. La fonction φ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et on a $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$, donc φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

  On a de plus : $\forall n\geq 2, \forall t\in[0,+\infty[,\ |f_n(t)|\leq\varphi(t)$.

Grâce au théorème de convergence dominé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)dt=\int_0^1 dt=1.$$

Ex 2 : Déterminer le domaine de convergence simple de $\sum(-1)^{n+1}\ln(x)x^{2n+2}$. Déterminer si on a convergence normale sur ce domaine. Sinon, étudier la convergence normale sur tout segment inclus dans $]0,1[$. Étudier la convergence uniforme sur $]0,1[$.

Correction : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\mapsto(-1)^{n+1}\ln(x)x^{2n+2}$.
La fonction logarithme fait que l'on doit prendre x dans $\mathbb{R}_+^*$.
$\sum\underbrace{f_n(1)}_{=0}$ converge.
Pour $x>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)|=\ln(x)\lim\limits_{n\to+\infty}x^{2n+2}=+\infty$. On a donc divergence grossière.
Pour $x\in]0,1[$, on a : $|f_n(x)|=|\ln(x)|.|x^2|^{n+1}$ et $\sum|x^2|^{n+1}$ converge, donc $\sum|f_n(x)|$ converge, puis $\sum f_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{On a convergence simple sur }]0,1]}$$

Étudions les variations de $|f_n|$. On a : $\forall x\in]0,1],\ |f_n(x)|=-\ln(x)x^{2n+2}$.
On a : $\forall x\in]0,1],\ \dfrac{d}{dx}(-\ln(x)x^{2n+2})=-x^{2n+1}-(2n+2)\ln(x)x^{2n+1}=-x^{2n+1}[1+(2n+2)\ln(x)]$.
On a : $1+(2n+2)\ln(x)>0\Leftrightarrow\ln(x)>-\dfrac{1}{2n+2}\Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2n+2}}$.
Ainsi $|f_n|$ est croissante sur $]0,e^{-\frac{1}{2n+2}}]$ et décroissante sur $[e^{-\frac{1}{2n+2}},1]$.
On a donc $\|f_n\|_\infty=|f_n(e^{-\frac{1}{2n+2}})|=-\ln(e^{-\frac{1}{2n+2}})\left(e^{-\frac{1}{2n+2}}\right)^{2n+2}=\dfrac{1}{2n+2}e^{-1}$.
Ainsi $\sum\limits_{n\geq 0}\|f_n\|_\infty$ diverge.

$$\boxed{\text{On n'a pas convergence normale sur }]0,1]}$$

Soit $[a,b] \subset]0,1[$. On a : $\forall x \in [a,b],\ |f_n(x)| = -\ln(x)x^{2n+2} \leq -\ln(a)b^{2n+2}$, car $-\ln$ est décroissante et positive sur $]0,1[$. On a donc $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq -\ln(a)b^{2n+2}$. Comme $\sum b^{2n+2}$ converge, alors $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$, converge.

$$\boxed{\text{On a convergence normale sur tout segment de }]0,1[}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in]0,1[$. On pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$ (qui existe car on a la convergence simple sur $]0,1[$).

On a $R_n(x) = \ln(x) \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^2)^{k+1} = \ln(x) \sum_{l=n+2}^{+\infty} (-x^2)^l = \frac{\ln(x).(-x^2)^{n+2}}{1+x^2}$.

On a donc : $\forall x \in]0,1[,\ |R_n(x)| \leq |\ln(x).(-x^2)^{n+2}| = -\ln(x)x^{2n+4}$.

Grâce à l'étude de fonction précédente, on a : $\forall x \in]0,1[,\ 0 \leq -\ln(x)x^{2n+4} \leq \dfrac{e^{-1}}{2n+4}$.

Ainsi $\|R_n\|_{\infty,]0,1[} \leq \dfrac{e^{-1}}{2n+4}$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,]0,1[} = 0$, donc

$$\boxed{\text{On a convergence uniforme sur }]0,1[}$$

<u>Ex 3</u> :

1. Montrer que toute application continue f définie sur le segment $[0,1]$ et telle que $f(0) = 0$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_n$ sur $[0,1]$ avec $Q_n(0) = 0$.

2. Soit $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que G est dense dans F.

Correction :

1. Soit P_n une suite de polynômes telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - P_n\|_{\infty,[0,1]} = 0$.
   On pose $Q_n = P_n - P_n(0)$. On a : $Q_n(0) = 0$ et :
   $\forall x \in [0,1],\ |f(x) - Q_n(x)| \leq |f(x) - P_n(x)| + |P_n(0)| \leq \|f - P_n\|_{\infty,[0,1]} + |P_n(0)|$.
   On a donc $\|f - Q_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \|f - P_n\|_{\infty,[0,1]} + |P_n(0)|$.
   Comme (P_n) converge uniformément vers f, alors (P_n) converge simplement vers f, puis :
   $\lim\limits_{n \to +\infty} |P_n(0)| = |f(0)| = 0$, ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - Q_n\|_{\infty,[0,1]} = 0$.

2. Soit $f \in F$. Les éléments de G sont de la forme $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{N} a_k (e^{-x})^k$.
   Ainsi $G = \{x \mapsto P(e^{-x}),\ P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 0\}$. On voudrait utiliser le théorème de densité de Weierstrass, mais nous ne sommes pas sur un segment. De plus il faudrait écrire $f(x)$ sous la forme $g(e^{-x})$, pour approcher cela par des fonctions de la forme $x \mapsto P(e^{-x})$.
   On veut $f(x) = g(e^{-x})$. On pose donc $g : y \mapsto \begin{cases} f(-\ln(y)) & \text{si} \quad y \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$. g est continue sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} g(y) = \lim\limits_{+\infty} f = 0 = g(0)$, car $\lim\limits_{+\infty}(-\ln(y)) = +\infty$.
   Ainsi g est continue sur le segment $[0,1]$. Ainsi grâce à la question précédente, il existe une suite de polynôme (Q_n) telle que $Q_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g - Q_n\|_{\infty,[0,1]} = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $|f(x) - Q_n(e^{-x})| = |g(e^{-x}) - Q_n(e^{-x})| \leq \|g - Q_n\|_{\infty,[0,1]}$, car e^{-x} est dans $]0,1]$.
   On pose $u_n : x \mapsto Q_n(e^{-x})$ qui est dans G, pour n dans $\mathbb{N}$.
   Ainsi $\|f - u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \|g - Q_n\|_{\infty,[0,1]}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$. Ainsi G est dense dans F.