---

**Ex 1** : Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{x}{k}\right)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

*Correction :* Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{k}\sin\left(\dfrac{x}{k}\right)$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $|f_k(x)| \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{k^2}$, donc $\displaystyle\sum_{k\geq 1} f_k(x)$ converge absolument.

De plus $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \underbrace{f_k(0)}_{=0}$ converge.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k\geq 1} f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Montrons que $S$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On constate tout d'abord que :$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{d^p(\sin(x))}{dx^p} = \sin\left(x + \dfrac{p\pi}{2}\right)$ (à valider par récurrence).

Ainsi on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{d^p(f_k(x))}{dx^p} = \dfrac{1}{k^{p+1}}\sin\left(\dfrac{x}{k} + \dfrac{p\pi}{2}\right)$

- Pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, $f_k$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\sum_{k\geq 1} f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\|f_k^{(p)}\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{k^{p+1}}\sin\left(\frac{x}{k} + \frac{p\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{k^{p+1}}$. Ainsi comme $p+1 \geq 2$, alors $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \|f_k^{(p)}\|_\infty$ converge et donc $\displaystyle\sum_{k\geq 1} f_k^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Ex 2** : Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$.

*Correction :* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\displaystyle\frac{x}{e^{2x}-e^{-x}} = \frac{xe^{-2x}}{1-e^{-3x}} = xe^{-2x}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-3x})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2+3n)x}$, car on a : $0 \leq e^{-3x} < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f_n : x \mapsto xe^{-(2+3n)x}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et postives.
  De plus $e^{-x}f_n(x) = xe^{-(1+3n)x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Ainsi $f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right)$. Ainsi $f_n$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $x \mapsto \dfrac{x}{e^{2x}-e^{-x}}$ qui est continue par morceaux sur cet intervalle.

Dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a la relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

Or pour $n$ dans $\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-(2+3n)x}dx = \left[\frac{xe^{-(2+3n)x}}{-(2+3n)}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2+3n}\int_0^{+\infty} e^{-(2+3n)x}dx = \frac{1}{2+3n}\int_0^{+\infty} e^{-(2+3n)x}dx$, car par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-(2+3n)x} = 0$.

Ainsi : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{1}{2+3n}\left[\frac{e^{-(2+3n)x}}{-(2+3n)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(2+3n)^2}$.

Cela donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$.

---

**Ex 3** :

***1.*** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) = \dfrac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$ est une suite convergente (on pourra étudier $\sum(\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}))$.

***2.*** On note $\Gamma$ la limite simple de cette suite de fonctions. Montrer que $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

*Correction :*

***1.*** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$\ln(u_n(x)) - \ln(u_{n-1}(x)) = \ln\left(\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right) = \ln\left(\dfrac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)} \times \dfrac{x(x+1)...(x+n-1)}{(n-1)!(n-1)^x}\right) = \ln\left(\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^x \times \dfrac{n}{x+n}\right) = (-1)^2\ln\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^x \times \dfrac{x+n}{n}\right) = \ln\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^x\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right) = x\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

On a donc :
$\ln(u_n(x)) - \ln(u_{n-1}(x)) = x\left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right) + \dfrac{x}{n} - \dfrac{x^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{x+1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x+1}{2n^2}$.

Par comparaison de série à termes négatifs à partie d'un certain rang, la série téléscopique $\sum\limits_{n\geq 2}(\ln(u_n(x)) - \ln(u_{n-1}(x)))$ converge, donc la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel que l'on note $S(x)$.

Or nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) = e^{\ln(u_n(x))}$, car on a bien $u_n(x) > 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = e^{S(x)}$.

***2.*** Soit $n \geq 2$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $v_n(x) = \ln(u_n(x)) - \ln(u_{n-1}(x)) = x\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

Nous allons d'abord montrer que $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour $n \geq 2$, la fonction $v_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
  Pour majorer $|v_n|$, nous allons procéder à une étude de fonctions.
  Soit $n \geq 2$. On a :
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ v_n'(x) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{1+\frac{x}{n}} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{x+n} \leq -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{x+n} \leq -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} = 0$,
  en utilisant l'inégalité de concavité : $\forall x \in ]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$.
  Ainsi $v_n$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ v_n(x) \leq \lim\limits_{x\to 0^+} v_n(x) = 0$. Ainsi $v_n$ est aussi une fonction négative. Par consḉquent $|v_n|$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
  On a donc : $\forall x \in [a,b],\ |v_n(x)| \leq |v_n(b)|$, puis $\|v_n\|_{\infty,[a,b]} \leq |v_n(b)|$.
  Grâce à la première question $\sum\limits_{n\geq 2}|v_n(b)|$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 2}\|v_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

  Ainsi $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ converge sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.

  Ainsi $V = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} v_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Or pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $V(x) = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=2}^{N}(\ln(u_n(x)) - \ln(u_{n-1}(x))) = \lim\limits_{N\to+\infty}(\ln(u_N(x)) - \ln(u_1(x))) =$

$\ln(\Gamma(x)) - \ln(u_1(x))$ en notant que $\Gamma(x) > 0$, car $\Gamma(x) = e^{S(x)}$ en reprenant la première question.
On a donc $\ln(\Gamma(x)) = V(x) + \ln(u_1(x))$, puis $\Gamma(x) = u_1(x)e^{V(x)}$, puis $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par opérations et compositions.