1 Intégration des fonctions vectorielles

1.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Dans ce paragraphe $[a, b]$ désignera un segment de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Définition 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux sur un segment) *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction. On dit qu'elle est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, ..., a_p)$ de $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < ... < a_{p-1} < a_p = b$) telle que :*
- *pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, la restriction $f_j = f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ soit continue ;*
- *pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, on puisse prolonger prolonger f_j en une fonction $\tilde{f}_j$ continue sur $[a_j, a_{j+1}]$.*

Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Lemme 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux et fonctions coordonnées) *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, où pour tout i de $[\![1, n]\!]$, les fonctions f_i vont de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.*
f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout i de $[\![1, n]\!]$, les fonctions f_i le sont aussi.

Démonstration : • On suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (a_0, .., a_p)$ une subdivision adaptée à f. Soit $j \in [\![0, p-1]\!]$. La fonction f est continue sur $]a_j, a_{j+1}[$, donc toutes ses fonctions coordonnées f_i le sont aussi. Par ailleurs $\lim_{a_j^+} f$ et $\lim_{a_{j+1}^-} f$ existent, alors chaque fonction coordonnée admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1}. Donc pour tout i de $[\![1, n]\!]$, les fonctions $f_i|_{]a_j, a_{j+1}[}$ se prolongent par continuité sur $[a_j, a_{j+1}]$.
• On suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, les fonctions f_i sont continues par morceaux sur $[a, b]$. On note σ_i une subdivision adaptée à f_i, pour tout i de $[\![1, n]\!]$. Soit σ la réunion de toutes ces subdivisions. Cette subdivision étant plus fine que toutes les subdivisions σ_i, alors σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions f_i. On pose $\sigma = (a_0, ..., a_p)$. Soit $j \in [\![0, p-1]\!]$. Toutes ses fonctions coordonnées f_i sont continues sur $]a_j, a_{j+1}[$, donc f l'est aussi. De plus $\lim_{a_j^+} f_i$ et $\lim_{a_{j+1}^-} f_i$ existent, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, donc f admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1}. Ainsi $f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ se prolonge par continuité sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Lemme 1.1.2 (Intégration d'une fonction vectorielle sur une base) *Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, où pour tout i de $[\![1, n]\!]$, les fonctions f_i vont de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.*
Le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Démonstration : Soit $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une autre base de E et on décompose f dans cette base : $f = \sum_{i=1}^{n} g_i u_i$. On note $I = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ et $J = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b g_i(t) dt \right) u_i$. On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}} = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{U}$.

Définition 1.1.2 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment) *Soit $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le vecteur de E égal à $\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)dt \right) e_i$.*
Ce vecteur est noté $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 1.1.1
1. *Cette définition a un sens car l'intégrale de f sur $[a,b]$ ne dépend pas de la base choisie sur E grâce au lemme précédent.*
2. *Si $a > b$, on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_{[b,a]} f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.*

Exemple 1.1.1 *Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux telle que : $\forall t \in [a,b],\ f(t) \in F$. Montrer que $\int_a^b f$ est dans F.*

Proposition 1.1.1 (Linéarité) *Soient f, g définies sur $[a,b]$ à valeurs dans E, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.*

Démonstration : C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.2 (Relation de Chasles) *Soient $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux et $c \in]a,b[$. Alors :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.3 (Inégalité triangulaire) *Soit $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux. Alors :*

$$\left\| \int_{[a,b]} f(t)dt \right\| \ \leq \ \int_{[a,b]} \|f(t)\|dt \ \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Démonstration : Une fonction $\varphi : [a,b] \to E$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, ..., a_p)$ de $[a,b]$ telle que pour tout k de $[\![0, p-1]\!]$ la fonction φ soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$. On note $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e_i$. Si φ est en escalier, alors toutes les fonctions φ_i le sont sur $[a,b]$. En effet soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Alors la fonction φ est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$ et elle est égale à un vecteur v_k de E. On décompose $v_k = \sum_{i=1}^{n} v_{k,i} e_i$, alors : $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[, v_k = \varphi(x)$, , puis : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall x \in]a_k, a_{k+1}[\ v_{k,i} = \varphi_i(x)$ car $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E. Ainsi les fonctions φ_i sont aussi en escalier.
Par conséquent σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions φ_i et donc en utilisant l'expression d'une intégrale pour une fonction en escalier à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a : $\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \varphi_i \right) e_i =$
$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_{k,i} \right) e_i = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \left(\sum_{i=1}^{n} v_{k,i} e_i \right) = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k.$
Par ailleurs, la fonction $\|\varphi\|$ est en escalier : pour tout k de $[\![0, p-1]\!]$, sur $]a_k, a_{k+1}[$, elle est constante égale à $\|v_k\|$. Dans ce cas, on a :
$\| \int_a^b \varphi \| = \| \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k \| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| \times \|v_k\| = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \times \|v_k\| = \int_a^b \|\varphi\|$, en utilisant la valeur de l'intégrale de la fonction en escalier $\|\varphi\|$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résultat est donc vrai pour une fonction en escalier.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, avec $f_i : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Il existe une fonction en escalier $\psi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que : $\|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \varepsilon$.
Soit $\psi : [a,b] \to E$ définie par $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i e_i$.

Sur E, on pose la norme N_1 définie par : $N_1(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Comme en est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall x \in E,\ \alpha\|x\| \leq N_1(x) \leq \beta\|x\|$.
Ainsi : $\forall x \in E, \|f(x) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} N_1(f(x) - \psi(x)) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - \psi_i(x)| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha}$.
On a donc : $\forall x \in E,\ \|\psi(x)\| = \|\psi(x) - f(x) + f(x)\| \leq \|\psi(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f(x)\|$.
De plus, grâce à l'inégalité triangulaire pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq \int_a^b |f_i - \psi_i| \leq \varepsilon(b-a)$. Comme $\int_a^b (f - \psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i - \psi_i) \right) e_i$, alors : $N_1 \left(\int_a^b (f - \psi) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq n\varepsilon(b-a)$, puis : $\left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha}$.
On a donc : $\left\| \int_a^b f \right\| = \left\| \int_a^b (f - \psi) + \int_a^b \psi \right\| \leq \left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| + \left\| \int_a^b \psi \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|\psi\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b (\frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f\|) = \frac{2n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|f\|$. Ceci étant vrai pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, alors quand ε tend vers 0, on obtient : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Proposition 1.1.4 (Intégrale et application linéaire) *Soient $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux, F un espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

$$L \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b L(f).$$

Démonstration : Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, ...u_n)$ une base de F. On pose

$A=[a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}=Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(L)$. On a $f=\sum_{j=1}^{p} f_j e_j$. On a donc :

$L(f)=\sum_{j=1}^{p} f_j L(e_j)=\sum_{j=1}^{p} f_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}u_i=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,j}\sum_{j=1}^{p} f_j\right)u_i$. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, l'application $a_{i,j}\sum_{j=1}^{p} f_j$ est continue par morceaux, par combinaison linéaire et par définition de l'intégrale (qui ne dépend pas de la base choisie), on a : $\int_a^b L(f)=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\left(a_{i,j}\sum_{j=1}^{p} f_j\right)u_i=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,j}\sum_{j=1}^{p}\int_a^b f_j\right)u_i$, par linéarité de l'intégrale. D'autre part, on a :

$$L\left(\int_a^b f\right)=L\left(\sum_{j=1}^{p}\underbrace{(\int_a^b f_j)}_{\in\mathbb{K}}e_j\right)=\sum_{j=1}^{p}(\int_a^b f_j)L(e_j)=\sum_{j=1}^{p}(\int_a^b f_j)\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}u_i=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,j}\sum_{j=1}^{p}\int_a^b f_j\right)u_i=\int_a^b L(f).$$

Théorème 1.1.1 (Convergence des sommes de Riemann) *Soit $f:[a,b]\to E$ une fonction continue. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soient R_n et R'_n les sommes de Riemann de f définies par :*

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad et \quad R'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors les suites $(R_n)_{n\geq 1}$ et $(R'_n)_{n\geq 1}$ des sommes de Riemann convergent vers $\int_a^b f(t)dt$:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Démonstration : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $a_k=a+k\frac{b-a}{n}$. On définit la fonction φ_n (qui est dite en escalier) par : $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\forall x\in[a_k,a_{k+1}[,\ \varphi_n(x)=f(a_k)$ et $\varphi_n(b)=f(b)$.
Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue sur le compact $[a,b]$, alors grâce au théorème de Heine, elle est uniformément continue. Il existe donc $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall u,v\in[a,b],\ |u-v|\leq\alpha\Rightarrow\|f(u)-f(v)\|\leq\varepsilon$.
Il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Rightarrow\frac{b-a}{n}\leq\alpha$, car $\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que : $n\geq N$. Soit $x\in[a,b[$. Il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que x soit dans $[a_k,a_{k+1}[$. Or $0\leq x-a_k\leq a_{k+1}-a_k=\frac{b-a}{n}\leq\alpha$, donc $\|f(x)-f(a_k)\|\leq\varepsilon$ et donc : $\|f(x)-\varphi_n(x)\|\leq\varepsilon$. Or $f(b)=\varphi(b)$, donc : $\forall x\in[a,b],\ \|f(x)-\varphi_n(x)\|\leq\varepsilon$.
Ainsi on a : $\|\int_a^b f-\int_a^b\varphi_n\|=\|\int_a^b(f-\varphi_n)\|\leq\int_a^b\|f-\varphi_n\|\leq\varepsilon(b-a)$. Or on constate que $\int_a^b\varphi_n=R'_n$.

On a donc montré que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Rightarrow\|\int_a^b f-R'_n\|\leq(b-a)\varepsilon$. Cela prouve que $\lim_{n\to+\infty}R'_n=\int_a^b f$.

On montre de même que $\lim_{n\to+\infty}R_n=\int_a^b f$.

Remarque 1.1.2
1. *Pour conserver l'idée de limite de moyennes sur $[a,b]$, on peut écrire :*
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$
2. *Pour faire apparaître une somme de Riemann, factorisez d'abord votre expression par $1/n$, puis essayer de trouver dans le $\sum$ une formule en k/n, ce qui vous permettra d'identifier votre fonction f et enfin, vous trouvez l'intervalle $[a,b]$.*

Exemple 1.1.2 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Trouver un équivalent de* $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n+2)^\alpha} + ... + \dfrac{1}{(2n)^\alpha}$.

1.2 Primitives et intégrales

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

1.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Définition 1.2.1 (Primitive) *Soit $f : I \to E$ une fonction continue. Une application $g : I \to E$ est une primitive de f si g est dérivable sur I et : $g' = f$.*

Théorème 1.2.1 (Théorème fondamental de l'analyse) *Soient $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$. Alors l'application F de I dans E définie par : $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est f. L'application F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Démonstration : Si on écrit $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i e_i$, avec $f_i : I \to \mathbb{K}$ les fonctions coordonnées, alors :
$\forall x \in I,\ \displaystyle\int_a^x f(t)dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^x f_i(t)dt\right) e_i$. Comme f est continue sur I, alors toutes les fonctions coordonnées le sont, puis en appliquant le théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on obtient : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall x \in I,\ \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f_i(t)dt\right) = f_i(x)$. Grâce aux résultats sur les dérivées des fonctions vectorielles, on a donc $\forall x \in I,\ \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i = f(x)$.
Ainsi F est une primitive de F.
Soit G une primitive de f s'annulant en a. On a sur I : $(G - F)' = f - f = 0$. Donc $G - F$ est constante, mais comme $(G - F)(a) = 0$, alors $G - F = 0$, puis $F = G$.

Remarque 1.2.1 *(IMPORTANTE) Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.*
En effet, $x \mapsto f(x) - f(a)$ est la primitive de f' s'annulant en a. On conclut par le théorème précédent.

Exemple 1.2.1 *1. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = 1 + \int_0^{x+y} f(t)dt.$$

2. ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit* $c \in \mathbb{R}$, *u et v deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}_+$, *avec u à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et v à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *On suppose que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leq c + \displaystyle\int_0^x u(t)v(t)dt\ \ (*)$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leq c \exp\left(\displaystyle\int_0^x v(t)dt\right)$ *(on pourra considérer* $w : x \mapsto c + \displaystyle\int_0^x u(t)v(t)dt$ *que l'on dérivera).*

1.2.2 Applications

a) Inégalité des accroissements finies

Théorème 1.2.2 (Inégalité des accroissements finis) *Soit* $f : I \to E$ *de classe* $\mathcal{C}^1$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que :* $\forall x \in \mathring{I},\ \|f'(x)\| \leq M$.
Alors : $\forall a, b \in I,\ \|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$.

Démonstration : Soient $a, b \in \mathring{I}$. Grâce à la remarque 1.2.1, on a :
$\|f(b) - f(a)\| = \|\displaystyle\int_a^b f'(t)dt\| \leq \int_{I(a,b)} \|f'\| \leq \int_{I(a,b)} M = M|b - a|$, avec $I(a,b) = [a,b]$ si $a \leq b$ et $I(a,b) = [b,a]$ sinon.

Exemple 1.2.2 1. *Montrer que :* $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$.

2. *Soit* U *un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $g : U \to E$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$*, telle qu'il existe* $K \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall x \in U$, $|||dg(x)||| \leq K$ *(on rappelle que :* $dg(x) \in \mathcal{L}(E, F)$*). Montrer que* g *est* K*-lipschitzienne.*

b) Intégration d'une limite uniforme

Proposition 1.2.1 (Intégration d'une limite uniforme sur un segment) 1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_n : [a, b] \to E$ *une fonction continue. On suppose que la suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* u*. Alors la fonction* u *est continue sur* $[a, b]$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b u$.

2. *Soit* $a \in I$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_n : I \to E$ *continue. On suppose que la suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers une fonction* u*. Alors la fonction* u *est continue sur* I *et si on pose* $U_n : x \mapsto \int_a^x u_n$ *et* $U : x \mapsto \int_a^x u$*, alors* (U_n) *converge uniformément vers* U *sur tout segment de* I*.*

Démonstration : La démonstration est identique à celle sur les suites de fonctions (chapitre 8) à valeurs dans $\mathbb{K}$, sauf que l'on remplace les valeurs absolues par des normes.

Corollaire 1.2.1 (Intégration d'une série de fonctions sur un segment) 1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $f_n : [a, b] \to E$ *une fonction continue. Si* $\sum f_n$ *est une série de fonctions qui converge uniformément ou normalement sur* <u>*le segment* $[a, b]$</u>*, alors la série* $\sum \int_a^b f_n$ *converge et :* $\int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $f_n : I \to E$ *une fonction continue, avec* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit* $a \in I$*. On suppose que* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I*. Alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* I *et :* $\forall x \in I,\ \int_a^x \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)dt$.

c) Problème de Cauchy pour les équations différentielles

Proposition 1.2.2 (Problème de Cauchy sous forme intégrale) *Soient* $(t_0, x_0) \in I \times E$ *et deux applications continues* $a : I \to \mathcal{L}(E)$ *et* $b : I \to E$*. Une application* φ *est une solution du problème de Cauchy :*

$$(E) : x' = a(t).x + b(t) \quad et \quad x(t_0) = x_0$$

si et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale :

Démonstration :

Remarque 1.2.2 *Cette formulation a un intérêt plutôt théorique et sert par exemple à montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Donnons la démonstration de ce théorème qui n'est pas exigible.*
Pour $(t,x) \in I \times E$, *on pose :* $f(t,x) = a(t).x + b(t)$. *On définit par récurrence la suite de fonction* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en posant :* $\varphi_0 : t \mapsto x_0$ *et :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_{n+1} : t \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds$, *définie sur* I. *Comme* a *est continue et la composition* $(u,y) \mapsto u(y)$ *de* $\mathcal{L}(E) \times E$ *dans* E *l'est aussi car on est en dimension finie, alors on montre par récurrence que toutes les fonctions* φ_n *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.
Soit $K = [a,b]$ *tel que :* $t_0 \in K \subset I$. *On pose* $h = b - a > 0$. *L'ensemble* K *est une partie compacte, donc les fonctions continues* a *et* $t \mapsto f(t,x_0)$ *y sont bornées. Soit* $k = \sup\limits_{t\in K} |||a(t)|||$ *et* $M = \sup\limits_{t\in K} \|f(t,x_0)\|$. *On a :* $\forall (t,x_1,x_2) \in K \times E \times E,\ \|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| = \|a(t).(x_2 - x_1)\| \leq |||a(t)|||.\|x_2 - x_1\| \leq k\|x_2 - x_1\| \quad (*)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on pose* $\mathcal{P}(n) : \forall t \in K,\ \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq \dfrac{Mk^{n-1}}{n!}|t - t_0|^n$.
$\mathcal{P}(1)$ *est vérifée, car :* $\forall t \in K,\ \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| = \|\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)ds\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s,x_0)\|ds\right| \leq M|t - t_0|$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et on suppose* $\mathcal{P}(n)$. *Soit* $t \in K$. *On a :*

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| = \|\int_{t_0}^{t} [f(s,\varphi_n(s)) - f(s,\varphi_{n-1}(t))]ds\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi_n(s)) - f(s,\varphi_{n-1}(s))\|ds\right|.$$

Par $(*)$, *on a donc :*

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \left|k\int_{t_0}^{t} \|\varphi(s) - \varphi_{n-1}(s)\|\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \frac{Mk^n}{n!}|s - t_0|^n ds\right|,$$

grâce à $\mathcal{P}(n)$.
Si on a $t \geq t_0$, *alors* $\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \dfrac{Mk^n}{n!}\displaystyle\int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n ds = \dfrac{Mk^n}{n!}.\dfrac{(t - t_0)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{Mk^n}{(n+1)!}|t - t_0|^{n+1}$.
Si on a $t \leq t_0$, *alors* $\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \dfrac{Mk^n}{n!}\displaystyle\int_{t}^{t_0} (t_0 - s)^n ds = \dfrac{Mk^n}{n!}.\dfrac{(t_0 - t)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{Mk^n}{(n+1)!}|t - t_0|^{n+1}$.
On a donc $\mathcal{P}(n+1)$, *ce qui achève la récurrence.*
Par conséquent, comme pour t *dans* K, *on a* $|t - t_0| \leq h$, *alors :*
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in K,\ \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq Mh\dfrac{(kh)^{n-1}}{n!}$.
Montrons que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément. La suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la série télescopique* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\varphi_n - \varphi_{n-1})$ *converge pour la norme* $\|.\|_{\infty,K}$. *Nous venons de voir que :*
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_{\infty,K} \leq Mh\dfrac{(kh)^{n-1}}{n!}$. *Cela prouve même la convergence normale de* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\varphi_n - \varphi_{n-1})$, *car la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} Mh\frac{(kh)^{n-1}}{n!}$ *converge vers* $\dfrac{M}{k}e^{kh}$ *si* $k \neq 0$ *et converge clairement si* $k = 0$.
Soit φ *la limite de la suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *qui est aussi continue par convergence uniforme et continuité de* φ_n.
Montrons maintenant que φ *est bien solution du problème de Cauchy initial.*
Tout d'abord, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(t_0) = x_0$, *donc en passant à la limite :* $\varphi(t_0) = x_0$.
Soit $t \in I$. *On prend* $K = [t_0,t]$ *ou* $K = [t,t_0]$. *Par* $(*)$, *on a :*
$\forall s \in K,\ \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\varphi_n(s))\| \leq k\|\varphi(s) - \varphi_n(s)\| \leq k\|\varphi - \varphi_n\|_{\infty,K}$. *Ainsi la suite de fonctions* $(s \mapsto f(s,\varphi_n(s)))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $s \mapsto f(s,\varphi(s))$ *sur le segment* K *et donc comme*

toutes ces fonctions sont continues, alors $\lim_{n\to+\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$.

Or on a : $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds$, *donc en passant à la limite quand* n *tend vers* $+\infty$, *on a :* $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$. *Ceci prouve d'une part la dérivabilité de* φ *sur* I, *mais aussi que* φ *est solutions de* $x' = a(t).x + b(t)$, *grâce à la proposition précédente.*

Montrons maintenant l'unicité.

Supposons qu'il existe une fonction ψ *dérivable, telle que* $\psi(t_0) = x_0$ *et que :* $\forall t \in I,\ \psi'(t) = f(t,\psi(t))$.

Soit $t \in I$. *On pose* $K = [t_0,t]$ *ou* $K = [t,t_0]$. *Soit* $b = \sup_{s\in K} \|\psi(s) - x_0\|$ *(la continuité de* ψ *et le caractère compact de* K *justifiant l'existence de* b*). Grâce à la proposition précédente,* $\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds$. *En procédant comme précédemment, on montre par récurrence (ici on commence à* $n = 0$*) que :* $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ \|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq b\dfrac{(k|t-t_0|)^n}{n!}$. *Comme la série* $\sum \dfrac{(k|t-t_0|)^n}{n!}$ *converge (sa somme est* $\exp(k|t-t_0|)$*), alors :* $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{(k|t-t_0|)^n}{n!} = 0$, *puis :* $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \psi(t)$, *donc :* $\varphi(t) = \psi(t)$.

d) Intégration le long d'une courbe

Proposition 1.2.3 (Intégration le long d'une courbe) *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Soient* U *un ouvert de* E, F *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et* $f : U \to F$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$. *Pour toute application* $\gamma : [0,1] \to U$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$, *on a :*

$$\int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt =$$

Démonstration : Soit $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))$ définie sur $[0,1]$. Cette application est $\mathcal{C}^1$, par composition et la règle de la chaîne donne : $\forall t \in [0,1],\ \varphi'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$, puis $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$.

Remarque 1.2.3 *Si* γ *est de la forme* $t \mapsto a + tv$, *avec* $v \in E$, *alors* $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a+tv).vdt$.

1.3 Formules de Taylor

1.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 1.3.1 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soient* $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,E)$ *et* $a \in I$.
Alors pour tout point $x \in I$, *on a :*

$$f(x) =$$

Démonstration : Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors ses fonctions coordonnées le sont aussi et donc la formule s'obtient en appliquant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ aux fonctions coordonnées de f.

Remarque 1.3.1

1. *La quantité* $\int_a^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ *est appelée reste intégrale et permet de mesurer exactement l'erreur commise lorsque l'on approche* $f(x)$ *par son polynôme de Taylor en* a.
2. *Cette formule est vraie sur* I *tout entier, c'est donc une propriété globale.*

Exemple 1.3.1 *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0; a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que toutes les dérivées de f sont positives.*

1. *Montrer que :* $\forall x \in [0; a[, \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)du.$

   On pose $R_n(x) = x^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)du.$

2. *Montrer que pour tout entier n et pour tout x de $[0; a[$, on a :* $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$.

3. *Soient x et y tels que l'on ait $0 \leq x < y < a$. Montrer que l'on a :* $R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

4. *En déduire que pour tout $x \in [0; a[$, on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

Corollaire 1.3.1 (Formule de Taylor pour les polynômes) *Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a :*

$$A = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} A^{(k)}(a) \qquad \text{ou} \qquad A(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} A^{(k)}(a).$$

Exemple 1.3.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et H un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer qu'il existe $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, tels que : $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P^{(i)}(0) = 0\}$.*

1.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I. Alors :*

$$\forall a, b \in I, \ \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq$$

Démonstration : • Si $a = b$, c'est clair.
• Si $a < b$, alors en reprenant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \ \leq \ \int_a^b \left\| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt.$$

Par croissance de l'intégrale, cette dernière est majorée par $\displaystyle\int_a^b \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-t)^n}{n!} dt \ = \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.
• Calcul analogue pour $a > b$ en intervertissant les bornes des intégrales majorantes.

Remarque 1.3.2 *L'inégalité de Taylor-Lagrange est une formule globale vraie sur tout l'ensemble de définition. Elle permet de majorer simplement l'erreur commise lorsque l'on approche $f(x)$ par son polynôme de Taylor en a.*

Exemple 1.3.3 *1. (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \ \left| \operatorname{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3 \operatorname{sh}(1)}{6}$.*

(b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$, avec $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \right) - n$, pour n dans $\mathbb{N}^*$.

2. *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E)$ *telle que* $\|f\|$ *et* $\|f''\|$ *soient majorées respectivement par* M_0 *et* M_2.
   (a) *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \in \mathbb{R}_+^*,\ \|f'(x)\| \leq \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.
   (b) *En déduire que* f' *est bornée par* $2\sqrt{M_0 M_2}$.

1.3.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.3.2 (Formule de Taylor-Young) *Soit* $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$*. Alors* f *admet un développement limité à l'ordre* n *en* $a \in I$*, donné par :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x\to a}((x-a)^n) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur n.

• Si $n = 1$, alors f étant dérivable admet un développement limité à l'ordre un, ce qui donne : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose le résultat au rang n.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. On pose $\psi : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (on a $n+1 \geq 1$).

On applique l'hypothèse de récurrence à f' qui est de classe $\mathcal{C}^n$, donc il existe $\beta : I \to E$ tel que $\lim_a \beta = 0$ et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + (x-a)^n \beta(x).$$

Autrement dit : $\forall x \in I,\ \psi'(x) = (x-a)^n \beta(x)$.

Soient $a, x \in I$ et on note $I(a,x) = [a,x]$, si $a \leq x$ et $I(a,x) = [x,a]$ sinon. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à ψ sur le segment $[a,x]$ (sur ce compact, ψ' est continue donc bornée) :

$$\|\psi(x) - \psi(a)\| \leq |x-a| \sup_{t \in I(a,x)} \|\psi'(t)\| = |x-a| \sup_{t \in I(a,x)} \|(t-a)^n \beta(t)\| \leq |x-a|^{n+1} \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\|.$$

Ceci donne : $\frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\|$.

Montrons que $\lim_{x \to a} \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\| = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_a \beta = 0$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in I,\ |t-a| \leq \alpha \Rightarrow \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in I$, tel que : $|x-a| \leq \alpha$. Ainsi pour t dans $I(a,x)$, on a : $|t-a| \leq \alpha$, donc $\|\beta(t)\| \leq \varepsilon$, ce qui donne $\sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Ainsi : $\lim_{x \to a} \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = 0$ et donc :

$f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = o((x-a)^{n+1})$, d'où le résultat pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Remarque 1.3.3 *La formule de Taylor-Young est une propriété locale, car elle donne un comportement quand x tend vers a.*

2 Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

2.1 Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Définition 2.1.1 (Surfaces de $\mathbb{R}^3$) *Si F est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble $\{(x,y,z) \in U,\ F(x,y,z) = 0\}$ est appelé surface de $\mathbb{R}^3$.*

Exemple 2.1.1 *Décrire les surfaces définies par les équations :*

1. $0 = ax + by + cz - d$, *avec* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ *:*
2. $0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8$ *:*

Voici un cas particulier de surface :

Définition 2.1.2 (Graphe d'une fonction numérique de $\mathbb{R}^2$) *Une fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ *de classe $\mathcal{C}^1$ se représente dans l'espace à l'aide de points de coordonnées (x,y,z) tels que $z = f(x,y)$. Cela définit une surface qui est incluse dans $\mathbb{R}^3$, en considérant $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y) - z = 0\}$.*

Exemple 2.1.2

Représenter $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2.2 Vecteurs tangents

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et M est une partie de E.

Définition 2.2.1 (Vecteur tangent à M) *Soient $x \in M$ et $v \in E$. On dit que v est un vecteur tangent à M en x s'il existe un réel strictement positif ε et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ dérivable en 0, telle que : $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.*
On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x.

Exemple 2.2.1 *Soit F un sous-espace affine de E de direction A. Soit $x \in F$. Montrer que : $T_xF = A$.*

Proposition 2.2.1 (Vecteurs tangents d'une partie définie implicitement) *Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathcal{C}^1$, avec Ω un ouvert de E. Soit $M = \{x \in \Omega,\ g(x) = 0\}$. Soit $x \in M$. Si $dg(x) \neq 0$, alors $T_xM = \mathrm{Ker}\,(dg(x))$.*
En particulier si E est muni d'une structure euclidienne, si $\nabla g(x) \neq 0$, alors $T_xM = (\nabla g(x))^\perp$.

Démonstration : Nous admettons le premier point.
Le deuxième point vient du fait que : $\forall h \in E,\ dg(x).h = \langle \nabla g(x), h \rangle$.

Exemple 2.2.2 1. *On retrouve le fait que le gradient soit orthogonal aux lignes de niveau. En effet soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, avec Ω un ouvert de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la ligne de niveau $X_\lambda = \{x \in \Omega,\ f(x) = \lambda\}$. Soient $x \in X_\lambda$ et $v \in T_x X_\lambda$. Alors v et $\nabla f(x)$ sont orthogonaux. En reprenant la proposition précédente, on considère $g = f - \lambda$ et donc $X_\lambda = \{x \in \Omega,\ g(x) = 0\}$. Ainsi $T_x X_\lambda = (\nabla g(x))^\perp = (\nabla f(x))^\perp$, car $\nabla g = \nabla f$, car λ est constante.*

2. *Nous rappelons que nous avons vu dans le chapitre 15, que si $f = \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, alors : $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ df(I_n)(H) = tr(H)$. Soit $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}$. Déterminer $T_{I_n}(SL_n(\mathbb{R}))$.*

3. *On considère la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, avec $R > 0$. Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in S$. Déterminer $T_u S$.*

Corollaire 2.2.1 (Vecteurs tangents à un graphe d'une fonction de deux variables) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $\mathcal{S}$ la surface (de $\mathbb{R}^3$) définie par l'équation : $z = f(x, y)$ qui est le graphe de f.*
Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Alors

$$T_a\mathcal{S} = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3,\ w = u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right\}.$$

Démonstration : Soit $g : (x, y, z) \mapsto f(x, y) - z$. On a :
$\forall h = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,\ dg(a)(h) = \frac{\partial g}{\partial x}(a)u + \frac{\partial g}{\partial y}(a)v + \frac{\partial g}{\partial z}(a)w = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v - w$. Ainsi
$T_a\mathcal{S} = \mathrm{Ker}\,(dg(a)) = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3,\ u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - w = 0\right\}$.

Définition 2.2.2 (Plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\mathcal{S}$ la surface définie par l'équation : $f(x, y, z) = 0$ et on considère $a \in \mathcal{S}$.*
Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en a est le sous-espace affine $a + T_a\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$. Ce plan passe donc par a et $T_a\mathcal{S}$ est sa direction.

Corollaire 2.2.2 (Équation des plans tangents au graphe d'une fonction de deux variables) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On pose $\mathcal{S}$ la surface définie par l'équation : $z = f(x, y)$.*
Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Alors l'équation du tangent à $\mathcal{S}$ en a est :

Exemple 2.2.3 1. *Le plan tangent de la spère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (avec $R > 0$) en $u = (u_1, u_2, u_3) \in S$ est*

2. *Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = x^2 + y^2$. Soit $a = (1, -1, 2) \in \mathcal{S}$. Quelle est l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en a ?*

2.3 Optimisation sous contrainte d'égalité

Proposition 2.3.1 (Extremum sur une partie M) *Soit Ω un ouvert de E. Soit M une partie de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable en un point x de M. Si $f|_M$ admet un extremum local en x, alors : $\forall v \in T_xM,\ df(x)(v) = 0$.*

Démonstration : Soit $v \in T_xM$. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Comme γ est à valeur dans M et que $f|_M$ admet un extremum en x, alors $g : t \mapsto f(\gamma(t))$ admet un extremum en 0. La fonction g étant définie sur un ouvert, alors on a : $g'(0) = 0$, soit : $0 = df(\gamma(0)).\gamma'(0) = df(x).v$.

Théorème 2.3.1 (Optimisation sous contrainte) *Soient Ω un ouvert et f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $M = \{x \in \Omega,\ g(x) = 0\}$. Soit $x \in M$ tel que : $dg(x) \neq 0$.*
Si $f|_M$ admet un extremum local en x, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(x) = \lambda dg(x)$.
En particulier, si E est un espace euclidien, dans ces conditions il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$.

Démonstration : $df(x)$ et $dg(x)$ sont deux formes linéaires. Or nous avons $T_xM = \mathrm{Ker}\,(dg(x))$, donc grâce à la proposition précédente, $\mathrm{Ker}\,(dg(x)) \subset \mathrm{Ker}\,(df(x))$.
Si $\mathrm{Ker}\,(df(x)) = E$, alors $df(x) = 0$, puis $df(x) = 0.dg(x)$.
Si $\mathrm{Ker}\,(df(x)) \neq E$, alors $\dim(\mathrm{Ker}\,(dg(x))) = \dim(\mathrm{Ker}\,(df(x))) = \dim(E) - 1$, puis
$\mathrm{Ker}\,(dg(x)) = \mathrm{Ker}\,(df(x))$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que : $df(x) = \lambda dg(x)$, car nous avons un hyperplan défini par les formes linéaires non nulles $df(x)$ et $dg(x)$.
Dans le cas euclidien, cela signifie que : $\forall h \in E,\ \langle \nabla f(x), h\rangle = df(x).h = \lambda dg(x).h = \lambda \langle \nabla g(x), h\rangle$, puis : $\forall h \in E,\ \langle \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x), h\rangle$. Ainsi $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x)$ est dans $E^\perp = \{0\}$ et donc : $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$.

Exemple 2.3.1

1. ***(CCP 41)*** *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.*
   Soit $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\right\}$ qui est la sphère de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{13}$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ usuelle.
   C est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, C est un compact de $\mathbb{R}^2$. On a aussi $C \neq \emptyset$. f est une application polynomiale donc f est continue sur le compact C. Donc f atteint un maximum et un minimum sur C.
   Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) *Justifier qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :*
   $$(S) : \left\{\begin{array}{l} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{array}\right.$$
   (b) *Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ.*
   (c) *Déterminer les valeurs possibles de (u, v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.*

2. *Soit E un espace euclidien et $u \in S(E)$. On pose $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$. On a vu dans le chapitre précédent que f est différentiable et : $\forall x \in E,\ \nabla f(x) = 2u(x)$. Montrer que f admet un minimum sur $S(0,1)$ et que celui-ci est une valeur propre de f.*