a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $0 < \dfrac{1}{k^x} < \zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{k\}) \in [0,1]$.

Par ailleurs $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \times \zeta(x) = 1$.

$$\boxed{\mathbb{P} \text{ définit une probabilité sur } (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))}$$

b. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Nous avons l'union disjointe $a\mathbb{N}^* = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{an\}$ et donc

$$\mathbb{P}(a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{an\}) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(an)^x} = \frac{1}{a^x \zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{a^x\zeta(x)} \times \zeta(x) = \boxed{\frac{1}{a^x}}.$$

c. Soit I une partie finie de $\mathbb{N}^*$ non vide. k est dans $\displaystyle\bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*$ est réalisé si et seulement si p_i divise k pour tout i de I, si et seulement si les nombres premiers p_i, avec i dans I, figurent dans la décomposition en facteurs premiers de k. Ceci est équivalent à dire que $\displaystyle\prod_{i\in I} p_i$ est dans la décomposition en facteurs premiers de k si et seulement si $\displaystyle\prod_{i\in I} p_i$ divise k.

Ainsi : $\displaystyle\bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^* = \left(\prod_{i\in I} p_i\right)\mathbb{N}^*$, puis

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*\right) = \mathbb{P}\left(\left(\prod_{i\in I} p_i\right)\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{\left(\prod_{i\in I} p_i\right)^x},$$

grâce à la question précédente.

Or $\displaystyle\frac{1}{\left(\prod_{i\in I} p_i\right)^x} = \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i^x} = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(p_i\mathbb{N}^*)$, toujours grâce à la question précédente.

On a donc $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(p_i\mathbb{N}^*)$, pour tout partie I finie de $\mathbb{N}^*$ non vide.

$$\boxed{\text{Les événements } (p_i\mathbb{N}^*)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ sont indépendants}}$$

d. La suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, car pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $B_{n+1} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n+1} \overline{p_k\mathbb{N}^*} = B_n \cap \overline{p_{n+1}\mathbb{N}^*} \subset B_n$. De plus l'événement $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{p_k\mathbb{N}^*}$ est l'événement « être divisible par aucun nombre premier p_k pour k dans $\mathbb{N}^*$ ». Grâce à l'existence d'une décomposition en facteurs premiers pour tout entier supérieur ou égal à 2, cela signifie que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{p_k\mathbb{N}^*} = \{1\}$.

On a donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mathbb{P}(\{1\})}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons $P(B_n) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{p_k\mathbb{N}^*}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{p_k\mathbb{N}^*}\right)$, grâce à l'indépendance prouvée dans la question précédente. Or pour tout k de $\mathbb{N}^*$, nous avons $\mathbb{P}\left(\overline{p_k\mathbb{N}^*}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(p_k\mathbb{N}^*\right) = 1 - \dfrac{1}{p_k^x}$.

On en déduit que $P(\{1\}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{p_k^x}\right)$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)}$$

e. Grâce à la question précédente, pour $x \in]1,+\infty[$, on a :
$\ln(\zeta(x)) = -\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{p_k^x}\right)\right) = -\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k^x}\right) = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k^x}\right)$.

Soit $x \in]1,+\infty[$ et pour k dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_k(x) = -\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k^x}\right)$. Sur $]1,+\infty[$, la suite de fonctions $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} u_k$ converge simplement vers $\ln(\zeta)$.

On suppose que $\sum\limits_{k\geq 1}\dfrac{1}{p_k}$ converge. On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1,+\infty[, \ \dfrac{1}{p_k^x} \leq \dfrac{1}{p_k}$, car $1/p_k$ est dans $]0,1[$ et $x > 1$. Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1,+\infty[, \ 0 \leq u_k(x) \leq -\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)$, puis : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \|u_k\|_\infty \leq -\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)$. Or $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k = +\infty$, car la suite des nombres premiers est une suite strictement croissante d'entiers, donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ p_k \geq k$. Ainsi $-\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right) \sim \dfrac{1}{p_k}$, donc la série $-\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)$ converge et donc $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} u_k$ converge normalement sur $]1,+\infty[$.

Ainsi par la double limite $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(\zeta(x)) = \lim\limits_{x\to 1^+}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)$, soit
$+\infty = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)$, ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k} \text{ diverge}}$$