

1. Grâce à la formule de transfert, comme S_n est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right] = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) P(S_n = k).$$

Or par définition d'une loi binomiale, nous avons : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Ainsi :

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right] = B_n(f)(x)$$

2. La fonction f est continue sur le compact $[0, 1]$, donc elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Donc par définition :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall a, b \in [0, 1], |a - b| \leq \alpha \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ vérifiant $|k/n - x| \leq \alpha$. On a bien k/n dans $[0, 1]$ et en reprenant l'implication précédente avec $a = k/n$ et $b = x$, on trouve

$$\left| f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

3. L'inégalité triangulaire nous donne :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{|k/n-x|>\alpha} \left(f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| \leq \sum_{|k/n-x|>\alpha} \left| f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| P(S_n = k) \\ & \leq \sum_{|k/n-x|>\alpha} \left(\left| f \left(\frac{k}{n} \right) \right| + |f(x)| \right) P(S_n = k) \leq \sum_{|k/n-x|>\alpha} 2\|f\|_\infty P(S_n = k) = 2\|f\|_\infty \sum_{|k/n-x|>\alpha} P(S_n = k). \end{aligned}$$

Or : $\left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right) = \bigcup_{0 \leq k \leq n, |k/n-x|>\alpha} (S_n = k)$. Cette dernière union étant disjointe, on a :

$$P \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right) = \sum_{|k/n-x|>\alpha} P(S_n = k) \text{ et donc :}$$

$$\left| \sum_{|k/n-x|>\alpha} \left(f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty P \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right)$$

4. On reprend α de la deuxième question.

Soit $x \in [0, 1]$. Comme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1$, alors :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f \left(\frac{k}{n} \right) x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k} \right| =$$

$$\left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right|.$$

Découpons cette dernière somme en deux en séparant les k tels que $|k/n - x| > \alpha$ et $|k/n - x| \leq \alpha$.
Ainsi

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{|k/n-x| \leq \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) + \sum_{|k/n-x| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| \leq \\ &\sum_{|k/n-x| \leq \alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P(S_n = k) + \left| \sum_{|k/n-x| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right|, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité triangulaire.

Grâce à la deuxième partie de la question 2, on a :

$$\sum_{|k/n-x| \leq \alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P(S_n = k) \leq \varepsilon \sum_{|k/n-x| \leq \alpha} P(S_n = k) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \varepsilon \times 1 = \varepsilon,$$

car $(S_n = k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements.

Pour la deuxième somme rappelons que l'on a montré dans la question 3 que :

$$\left| \sum_{|k/n-x| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

Or dans un exemple du cours, on a montré grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}. \text{ On a donc :}$$

$$\left| \sum_{|k/n-x| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

Ainsi par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{|k/n-x| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| = 0$.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{|k/n-x| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P(S_n = k) \right| \leq \varepsilon$.

En regroupant les deux inégalités, on a : $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$. Ceci étant valable pour tout x de $[0, 1]$ et 2ε étant une constante, on a : $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$, puis :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon}$$

5. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère $B_n(f)$ qui est une fonction polynomiale. La question précédente nous permet de dire que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Cela signifie que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$.

$$\boxed{f \text{ est la limite uniforme de la suite de polynômes } (B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}}$$