1.
$$\begin{cases} \forall x \in]-\pi/2,\pi/2[,\ y'(x) = 1 + y^2(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in]-\pi/2,\pi/2[,\ \dfrac{y'(x)}{1+y^2(x)} = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\pi/2,\pi/2[,\ \operatorname{Arctan}(y(x)) = x + C \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\pi/2,\pi/2[,\ \operatorname{Arctan}(y(x)) = x + C \\ \operatorname{Arctan}(y(0)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in]-\pi/2,\pi/2[,\ \operatorname{Arctan}(y(x)) = x \Leftrightarrow$$
$$\boxed{\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[,\ y(x) = \tan(x)},$$
car $\operatorname{Arctan}(y(x))$ et x sont dans $]-\pi/2,\pi/2[$, là où tan réalise une bijection sur son image.

2. On part de $f' = 1 + f^2$. Nous dérivons n fois cette relation (la constante 1 disparaît, car $n \geq 1$) et on utilise la formule de Leibniz :
$$f^{(n+1)} = (f \times f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} f^{(n-k)}.$$
On a donc : $\dfrac{f^{n+1}(0)}{(n+1)!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$. Ainsi on a :
$$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0,\pi/2[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.
Nous allons raisonner par récurrence forte.
• On a $f^{(0)} = \tan \geq 0$ sur $[0,\pi/2[$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n)$.
Si $n = 0$, comme $f' = 1 + f^2 \geq 0$, alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Si $n \geq 1$, on peut utiliser la relation de la question précédente qui nous donne :
$f^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$. Grâce à $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n)$, on a pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on a : $f^{(k)} f^{(n-k)} \geq 0$ sur $[0,\pi/2[$ et donc : $f^{(n+1)} \geq 0$ sur $[0,\pi/2[$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.
$$\boxed{\forall x \in [0,\pi/2[, \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) \geq 0}$$
Soit $x \in [0,\pi/2[$. Comme la fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,x]$, donc grâce à la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$f(x) = \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$
Comme on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \geq 0$, grâce au point précédent, alors :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq f(x)$.

Ainsi la série $\sum a_k x^k$ qui est à termes positifs a ses sommes partielles majorées (par $f(x)$), donc la série $\sum a_k x^k$ converge pour tout x dans $[0, \pi/2[$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence } R \text{ de } \sum a_n z^n \text{ vaut au moins } \pi/2}$$

4. Soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$, grâce à la question précédente.
   On a : $g(0) = a_0 = \tan(0) = 0$.
   Montrons que : $g' = 1 + g^2$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
   Soient $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Grâce à la question 2., on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1)a_{n+1}x^n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n$.
   On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$, pour n dans $\mathbb{N}$.
   Or par dérivation terme à terme d'une série entière, on a : $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$
   et par produit de Cauchy (on est dans l'intervalle de convergence des diverses séries entières considérées) : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = g^2(x)$.
   Ainsi : $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + a_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n x^n + a_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - w_0 + a_1 =$
   $g^2(x) + \tan'(0) - a_0 \times a_0 = g^2(x) + 1$.
   Ainsi la fonction g vérifie les mêmes hypothèses que la question 1., donc par unicité prouvée dans cette question, on a : $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ f(x) = g(x)$.

$$\boxed{\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$$