

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Séries entières

Rayon de convergence

- Lemme d'Abel.
- Le rayon de convergence est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée ; le rayon de convergence est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la série $\sum a_n r^n$ converge (ou converge absolument) ;
- Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence.
- Fonctions décomposables en série entière.
- Rayon de convergence et opérations sur les séries entières : somme, produit (produit de Cauchy), $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence (tout comme $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$).
- Méthodes de détermination d'un rayon de convergence dans l'ordre :
 - Règle de D'Alembert ;
 - Si $a_n = O_{+\infty}(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$ et si $a_n \sim_{+\infty} b_n$ alors $R_a = R_b$;
 - Utilisation d'inégalités à l'aide de la définition avec la borne supérieure.

Régularité de la somme

- CVN d'une série entière ; continuité sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité sur le disque ouvert de convergence.
- Théorème d'Abel radial.
- Dérivations des séries entières (la primitivation des séries entières n'est plus au programme, donc il faut la justifier).
- Caractère \mathcal{C}^∞ des séries entières ; expression des coefficients à l'aide des dérivées successives de la somme, unicité du DSE.
- Série de Taylor d'une fonction \mathcal{C}^∞ et condition sur le reste intégrale pour qu'une fonction \mathcal{C}^∞ soit DSE.

DSE des fonctions usuelles

- Ils ont tous été prouvés : $\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \operatorname{Arctan}, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto -\ln(1-x), x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Sur \mathbb{C} , DSE de \exp et $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
- Méthode pour décomposer une fonction en série entière (dans l'ordre) : opérations (somme et produit), changement de variable, dérivation, intégration, équation différentielle et formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale.
- Méthodes pour reconnaître un DSE : opérations (somme et produit), changement de variable, dérivation, intégration.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 19 (attention la banque ccp a été modifiée fin octobre, la bonne version a été réactualisée sur le site cahier de prepa)
- CCINP 20
- CCINP 21
- CCINP 24
- CCINP 51