

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Espaces probabilisés

### Révisions de sup sur le dénombrement

- Cardinal, injections/ surjections/ bijections entre ensembles finis, ensembles finis et inclusion.
- Opérations sur les ensembles finis et cardinal :  $\text{card}(\bar{A})$ ,  $\text{card}(E \cup B)$ ,  $\text{card}(E \times F)$ ,  $\text{card}(\mathcal{F}(E, F))$ ,  $\text{card}(\mathcal{P}(E))$ .
- Cardinal et interprétation des  $p$ -listes, arrangements (pas vraiment au programme, mais le nombre d'injections entre ensembles finis l'est...), permutations et combinaisons.
- Symétrie des coefficients binomiaux, triangle de Pascal,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ,  $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$  et complément : formule de Vandermonde :  $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ .

### Dénombrabilité

Ne pas trop insister sur ce paragraphe.

- Définition, exemple de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$ , produit cartésien d'ensemble dénombrables.
- Réunion finie ou dénombrable d'ensemble au plus dénombrables, produit cartésien d'ensembles dénombrables. Application :  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.
- Toute partie de  $\mathbb{N}$  est au plus dénombrable,  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.
- Le support d'une famille sommable est au plus dénombrable.

### Vocabulaire sur les ensembles

- Unions, intersections quelconques et opérations.
- Lien entre vocabulaire des ensembles et celui des probabilités : issues, événements, systèmes complets d'événements...

### Espaces probabilisés

- Tribu, stabilité des tribus par opérations.
- Probabilités, probabilités et opérations ensemblistes, probabilité d'une union croissante et d'une intersection décroissantes (et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\bigcup_{k=1}^n A_k)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap_{k=1}^n A_k)$ ), sous-additivité.
- Si  $\Omega$  est fini ou dénombrable, une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  s'identifie à une famille  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  de réels positifs sommable et de somme 1, via la formule :  $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$ .
- Révisions de sup : probabilité sur un univers fini, équiprobabilité, nombre de succès lors de  $n$  expériences indépendantes succès-échec.
- On admet l'existence d'une tribu et d'une probabilité sur l'espace modélisant une succession infinie d'épreuves aléatoires indépendantes.
- Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formule de Bayes.
- Indépendance, indépendance mutuelle.
- Compléments (HP) : Borel Cantelli 1 et 2 et interprétation, démonstration probabiliste de la formule d'Euler :  $\frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$ .

# À SAVOIR MONTRER

- CCINP 49 (il n'y a pas d'erreurs)
- CCINP 105
- CCINP 107
- CCINP 109
- CCINP 112