Semaine 15 : du 29 janvier au 2 février

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Variables aléatoires

Inégalités de concentration, variance et covariance

- Inégalité de Markov.
- Moment d'ordre r.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi et donc la variance de X est : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$, écart type, interprétation, variance des lois usuelles, opérartions sur la variance.
- Covariance, si deux variables aléatoires sont indépendnates, alors leur covariance est nulle (réciproque fausse), variance d'une finie somme et cas de variables aléatoirees deux à deux indépendantes.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes admettant une variance et de même loi. On suppose que ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes. On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et on note m l'espérance commune de $X_1, ..., X_n$ ($m = \mathtt{E}(X_1)$) et σ leur écart-type commun ($\sigma = \sigma(X_1)$). On a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, puis $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|\overline{X_n} - m| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Série génératrice

- Série génératrice G_X, pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, rayon de CV au moins égal à 1, caractérise la loi, série génératrice des lois classiques.
- X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas : $E(X) = G_X'(1)$.
- X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
- Série génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes, application somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi binomiale ou de Poisson.

Intégrales à paramètre

- Théorème de continuité, adaptation de l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans I, extension à une fonction à valeurs dans un EVN de dimension finie.
- Théorème de dérivabilité, adaptation de l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans I.
- Théorème de convergence dominé à paramètre continue.
- Extension au cas $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.
- Compléments : fonction Gamma et produit de convolution.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 29
- CCINP 30
- CCINP 50
- CCINP 96
- CCINP 99