Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints seront traités la semaine prochaine.

Espaces préhilbertiens

Produit scalaire (rappels de sup)

- Définition d'un produit scalaire ; espace préhilbertiens ; exemples canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; identification des produits scalaires sur les matrices colonnes avec celui sur $\mathbb{R}^n$; inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- Norme euclidienne associée ; vecteurs unitaires ; identités de polarisation ; formule du parallélogramme ; inégalité de Minokowski
- Vecteurs orthogonaux ; théorème de Pythagore ; sous-espaces orthogonaux ; orthogonal d'une partie (si $x_1, ..., x_p$ engendre un sous-espace vectoriel F , alors être dans l'orthogonal de F est équivalent à être orthogonal à tous les x_k).
- Familles finies orthogonales et orthonormées ; une famille finie orthogonale de vecteurs orthogonaux non nuls est libre.
- Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.
- Supplémentaire orthogonal et $F \oplus F^\perp = E$ quand F est sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie, $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$, $d(x,F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2}$ où $(e_1, ..., e_n)$ est une b.o.n. de F.

Espaces euclidiens (rappels de sup)

- Définition ; existence d'une base orthonormée ; complétion d'une famille orthonormée pour avoir une base orthonormée.
- Expression du produit scalaire dans une base orthonormée. Application si $\mathcal{B} = (e_1, ...e_n)$ est une base orthonormée de E et f est un endomorphisme de E le coefficient a_{ij} dans la base $\mathcal{B}$ vaut $(f(e_j)|e_i)$, puis expression de la trace à l'aide de cette formule.

Symétries orthogonales, réflexions, hyperplan

- Symétries orthogonales, réflexions, expression des réflexions.
- Théorème de représentation de Riesz, description deds hyperplans dans un espace euclidien.
- Projection orthogonale sur $vect(u)^\perp$, distance à $vect(u)^\perp$.

Adoint d'un endomorphisme

- Existence et définition de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
- Linéairité de $u \mapsto u^*$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, $u^{**} = u$.
- Lien entre matrice et adjoint en base orthonormée.
- Si $u(F) \subset F$, alors $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 63
- CCINP 76
- CCINP 77
- CCINP 80
- CCINP 92