Sauf mention contraire, tout est à savoir.

# Matrices et isométries vectorielles

## Isométrie vectorielle

- Définition par la conservation de la norme, conservation du produit scalaire, caractérisation par $u^* = u^{-1}$, caractérisation par l'image d'une base orthonormée, les groupe $O(E)$ et $SO(E)$.
- Bijectivité d'une isométrie vectorielle et déterminant d'une isométrie vectorielle.
- Symétries orthogonales, réflexions.
- Si $f$ est dans $O(E)$, on a : $f(F) \subset F \Rightarrow f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$ et $f$ induit une isométrie vectrielle sur $F$.

## Matrices orthogonales

- $M$ est orthogonale si $M^T M = MM^T = I_n$, $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales. C'est un groupe.
- Déterminant d'une matrice orthogonale.
- Dans une base orthonormée, la matrice d'un endomorphisme est orthogonale si et seulement si cet endomorphisme est une isométrie vectorielle .
- Les lignes (respectivement les colonnes) forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ (respectivement de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
- Caractérisation par la matrice de passage entre deux bases orthonormées.
- $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$, groupe spécial orthogonal.

## Isométries vectorielles d'un plan euclidien

- Orientation d'un espace vectoriel.
- Description de $O(2)$ et $SO(2)$, $SO(2)$ est commutatif.
- Lien entre $SO(2)$ et rotations.
- Classification des isométries vectorielles du plan.

## Réduction des matrices orthogonales et des isométries vectorielles

- Réduction des matrices orthogonales et des isométries vectorielles
- Cas des isométries vectorielles directes en dimension 3 et définition des rotations vectorielles de l'espace.

# Réduction des endomorphismes autoadjoint et des matrices symétriques réelles

- Endomorphismes autoadjoints ($u^* = u$) caractérisation par sa matrice dans une base orthonormée, $S(E)$ est l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.
- Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.
- Orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint, théorème spectral, théorème spectral version matricielle.
- Si $f$ est dans $S(E)$, on a : $f(F) \subset F \Rightarrow f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$ et $f$ induit un endomorphisme autadjoint sur $F$.

- Matrices symétriques positifs ($S_n^+(\mathbb{R})$) ou définies positives ($S_n^{++}(\mathbb{R})$) définies à l'aide de $X^TAX$, endomorphismes autoadjoints positifs ($S^+(E)$) ou définis positifs ($S^{++}(E)$), définis à l'aide de $(u(x)|x)$.
- Caractérisation par le spectre.

# À SAVOIR MONTRER

- CCINP 35 (pas d'erreur)
- CCINP 39
- CCINP 66
- CCINP 78
- CCINP 81