Semaine 18 : du 4 mars au 8 mars

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Fonctions vectorielles

- Dérivabilité (taux d'accroiseement) et dérivation des fonctions vectorielles, lien entre la dérivabilité et l'existence d'un développement limité à l'ordre un ; dérivation et fonctions coordonnées. Opérations sur les dérivées. Dérivation de $L \circ f$ et $B \circ f$, avec L et B des applications linéaires et multilinéaires. Application à la dérivation de $(f|g)$ et $\det(f, g)$.
- Dérivées successives, classe d'une fonction vectorielle. Dérivées successives d'une combinaison linéaire de $L \circ f$ et $B \circ f$, avec L et B des applications linéaires, bilinéaires (formule de Leibniz).
- Dérivation des suites et séries de fonctions vectorielles ; application à l'exponentielle de matrices ou d'endomorphismes, dérivation $t \mapsto \exp(ta)$ (avec a un endomorphisme ou une matrice).

Équation différentielles

Révisions de sup

- Équations linéaires, principe de superposition, problème de Cauchy.
- Équations linéaires d'ordre un, recherche de solutions particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Structure de l'ensemble des solutions homogènes et de l'ensemble des solutions avec second membre. Connaître sans réfléchir les solutions de $y' = cy$, avec $c \in \mathbb{C}$.
- Équations linéaires d'ordre deux à coefficients constants, recherche de solutions particulière avec un second membre du type $e^{\alpha x}$ avec α dans $\mathbb{C}$. Structure de l'ensemble des solutions homogènes et de l'ensemble des solutions avec second membre. Connaître sans réfléchir les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ et $y'' - \omega^2 y = 0$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.

Équations différentielles d'ordre un dans un espace vectoriel

- Définition ($x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ et système différentiel), lien entre équations linéaires scalaires d'ordre n et système différentiel d'ordre un.
- Problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz, structure et dimension de l'espace des solutions $x'(t) = a(t)(x(t))$. Structure des solutions de $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$. Adaptations de ceci aux équations linéaires scalaires d'ordre n.
- Résolution de $x'(t) = a.x(t)$, avec a constant : $t \mapsto \exp((t - t_0)a)x_0$ est l'unique solution telle que $x(t_0) = x_0$. Résolution de $X' = AX$, avec diagonalisable. Dans le cas où A n'est que trigonalisable, la trigonalisation doit comporter des indications.

Équations $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$

- Théorème de Cauchy-Lipschitz, structure et dimension des solutions de $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ et structure des solutions de $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.
- Wronskien, caractérisation d'une base de solutions homogène. Complément : utilisation du wronskien pour trouver une autre solution homogène à partir d'une solution homogène trouvée.
- Variations des constantes.
- Compléments : si y_0 est une solution homogène, recherche d'une solution de $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ sous la forme zy_0, changement de variable, exemple d'équations différentielles non linéaire.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 31
- CCINP 32
- CCINP 42
- CCINP 74
- Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire. On considère : $y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0 \ \ (\mathcal{E})$.
  1. Montrer que si y est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$, alors y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  2. Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E})$, alors $\tilde{y} : t \mapsto y(-t)$ est aussi solution de $(\mathcal{E})$.
  3. Montrer qu'une solution y est paire si et seulement $y'(0) = 0$.