Séance du 17/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [CCP] Soit p et q deux projecteurs de E où E est un espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p+q$ est un projecteur. Montrer que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Ex 2 : [CCP] On donne deux endomorphismes f et g d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

1. Montrer que si V est un sous-espace de E, $\dim V = \dim f(V) + \dim \operatorname{Ker} f \cap V$.
2. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg} f \circ g \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.
3. Montrer que $f \circ g \circ f = f \Rightarrow \operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg} f$.
4. Montrer que deux des propositions suivantes entraînent la troisième :
(i) $f \circ g \circ f = f$;
(ii) $g \circ f \circ g = g$;
(iii) $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

Ex 3 : [CCP] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul qui vérifie $f^3 + f = 0_{L(E)}$.

1. Démontrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires. On note $K = \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
2. Démontrer que $\dim(K) > 0$. Pour $x \in K \setminus \{0_E\}$, démontrer que $f(x) \in K$ et que $(x, f(x))$ est libre dans K.
3. Calculer $\det(-\mathrm{Id}_E)$, en déduire que K est de dimension 2. Démontrer qu'il existe une base de E où la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 4 : [CCP] Si P est dans $\mathbb{R}_3[X]$, on note $u(P)$ le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $X^4 - X$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer son noyau, son image.
3. Donner la matrice de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Ex 5 : [CCP] Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner un exemple où $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires.
2. Montrer que la suite de terme général $\dim \operatorname{Ker} f^k$ est croissante.
3. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k_0}$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker} f^{k_0}$ et $\operatorname{Im} f^{k_0}$ sont supplémentaires.

Ex 6 : [CCP] Soient E un de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E de même dimension. On note F' (respectivement G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (respectivement G).

1. Montrer que : $F + G = F \cap G + F' + G'$.
2. Montrer que si $(f_1, ..., f_p)$ est une base de F' et $(g_1, ..., g_p)$ est une base de G', alors $F + G = F + K$, avec $K = \text{Vect}(f_1 + g_1, ..., f_p + g_p)$.
3. Montrer que $F \cap K = \{0\}$ et que $(f_1 + g_1, ..., f_p + g_p)$ est libre.
4. Montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E ont un supplémentaire commun si et seulement s'ils ont la même dimension.

Ex 7 : [IMT 2]

1. Montrer que l'ensemble de suites $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / \ \exists a \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n + u_{n+2} = 2a\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, cet ensemble est noté E dans la suite.
2. Montrer que $\Psi : u \mapsto (a, u_0, u_1)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $n \mapsto 1, \ n \mapsto \cos\dfrac{n\pi}{2}, \ n \mapsto \sin\dfrac{n\pi}{2}$ forment une base de E.

Séance du 19/05 : Intégration

Ex 8 : [CCP]

1. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-at}}{t}dt = \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t}dt.$
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-at}}{t}dt = \ln a.$
3. Montrer que $\displaystyle f(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et bornée.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-t}-e^{-nt})f(t)dt.$
5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$

Ex 9 : [CCP] Donner, suivant α et β, les domaines d'existence de $\displaystyle I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ (on distinguera $\beta<0$, $\beta=0$, $\beta>0$) et de $\displaystyle I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}dt$ (on distinguera $\alpha<0$, $\alpha=0$, $\alpha>0$). Représenter ces domaines avec α en abscisse et β en ordonnée.

Ex 10 : [CCP]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$. On pourra considérer la fonction $\displaystyle x \mapsto \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.
3. On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'intégrale.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Ex 11 : [CCP] Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $\displaystyle F_f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-itx)\,\mathrm{d}t$.

1. On considère la fonction $g : t \mapsto \exp(-|t|)$. Justifier que F_g est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur pour tout réel x.
2. Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose de plus qu'il existe un entier $n>0$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Pour tout entier k, on pose $h_k : t \mapsto (-it)^k f(t)$.
   a. Justifier que $\forall k \in [\![0,n]\!], F_{h_k}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction F_f admet une dérivée d'ordre k et que $F_f^{(k)} = F_{h_k}$.

Ex 12 : [CCP] On pose $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.
2. Montrer que G est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $G'(x)$.
3. Montrer que G est constante sur $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Ex 13 : [IMT 2]

1. Si f est continue sur $[a, b]$, que représente $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$?

   Illustrer graphiquement et énoncer le théorème relatif à $S_n(f)$.
2. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}$.

Ex 14 : [IMT] On donne $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

1. Donner l'intervalle de définition D_F de F.
2. Étudier la continuité de F sur D_F.
3. Donner les valeurs de $F(0), F(1), \lim_{x \to +\infty} F(x)$.
4. Prouver que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et donner la valeur de F'.
5. Prouver qu'on a $\forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\},\ F'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

Séance du 21/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [CCP] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.
2. Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(nx) = nf(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(x) = x$.
4. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Ex 16 : [CCP]

1. Soit f un morphisme d'un groupe G dans un groupe G'.
   Montrer que si $x \in G$ est d'ordre fini n, $f(x)$ est d'ordre fini divisant n.
2. Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$ puis de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Ex 17 : [CCP]

1. Énoncer le théorème chinois.
2. Donner les solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
3. Combien y a-t-il de solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/(11 \times 13)\mathbb{Z}$? Les donner.
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation $7x + 3 = 0$.

Ex 18 : [IMT 2]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge 10 = 1$. Montrer que : $n^4 \equiv 1 \ \ [10]$.
2. On suppose $a \wedge 10 = 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que : $a^{4.10^k} \equiv 1 \ \ [10^{k+1}]$.

Ex 19 : [ENSEA] Factoriser $P = X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Ex 20 : [St Cyr]

1. Montrer que, pour $\alpha \in [0, 2\pi]$, on a : $|1 - e^{i\alpha}| = 2\sin(\alpha/2)\cdot$
2. Soit $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$; calculer $P(e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.
3. En déduire que $P(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.
4. Donner la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cdot$
5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}|$.

Ex 21 : [IMT] Soient deux entiers naturels non nuls m et n tels que n divise m.
Montrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$.
Dans le cas général, à quelle(s) condition(s) $X^n - 1$ divise-t-il $X^m - 1$?

<u>Ex 22</u> : [IMT] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et P'.

Séance du 26/05 : Probabilité, dénombrement

Ex 23 : [CCP] Soit une suite (A_k) d'évènements indépendants dans un espace probabilisé Ω.

On note $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $u_n = p(B_n)$.

On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(A_n) < 1$.

1. Montrer que (u_n) converge vers $p(B)$.

2. Montrer que $\sum \ln\big(1 - p(A_n)\big)$ et $\sum p(A_n)$ sont de même nature.

3. En déduire que $p(B) < 1 \Leftrightarrow \sum p(A_n)$ converge.

Ex 24 : [CCP] Soient $n \in \mathbb{N}^*, X, Y, Z$ trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $P(X + Y = k)$, puis pour $k \in [\![n + 1, 2n]\!]$.

2. Déterminer $P(X = Y = Z)$ (penser à la formule des probabilité totales).

3. Déterminer $P(X + Y + Z = n)$.

Ex 25 : [CCP] Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1, n]\!]$. On note X_k la variable aléatoire valant 1 si $\sigma(k) = k$ et 0 sinon. On note N le nombre de points fixes de σ.

1. *a.* Que peut-on dire des X_k ?

b. Déterminer espérance et variance de X_k.

c. Calculer $\text{cov}(X_i, X_j)$.

2. *a.* Lier N et les X_k ?

b. Calculer espérance et variance de N.

Ex 26 : [CCP] On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément p jetons dans l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro tiré et Y celle donnant le plus petit.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}$.

2. *a.* Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. En déduire que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \dfrac{(n-p)!k!p}{n!(k-p)!k}$.

c. Calculer l'espérance de X.

3. *a.* Donner la loi de Y.

b. Montrer que $E(X) = pE(Y)$.

Ex 27 : [TPE] Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise et si on tire une boule rouge, on la remet avec deux autres boules rouges. Soit l'événement A_n : "Lors des n premiers tirages, on a eu des boules rouges". On convient $P(A_0) = 1$.

1. Déterminer $P_{A_{n-1}}(A_n) = P(A_n|A_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire la valeur de $P(A_n)$.

3. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

<u>Ex 28</u> : [IMT] On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n est $\dfrac{1}{2^n}$. Lorsque k est dans $\mathbb{N}^*$, on pose A_k l'événement "n est multiple de k".

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour tous p et q, entiers strictement supérieurs à 1, que dire des événements A_p et A_q ?

<u>Ex 29</u> : [IMT] Une puce se déplace sur des cases alignées, numérotées de 0 à l'infini ; elle saute d'une ou deux cases vers la droite de manière équiprobable.
On note X_n la variable aléatoire représentant la case sur laquelle se trouve la puce après n sauts.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. On note Y_n la variable aléatoire du nombre de fois où elle a sauté d'une case au cours de n sauts. Donner la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

3. Écrire X_n en fonction de Y_n. Donner l'espérance et la variance de X_n.

4. On note A_k l'évènement « la puce est sur la case k ».
Montrer que $\forall k \geq 2$, $P(A_k) = \dfrac{1}{2}P(A_{k-1}) + \dfrac{1}{2}P(A_{k-2})$ et en déduire $P(A_k)$.

Séance du 28/05 : Matrices et déterminant

<u>Ex 30</u> : [CCP Compilation] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ; on dit que $u \in E$ est cyclique lorsque $B_u = \big(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\big)$ est une famille libre.
Si f admet un vecteur cyclique tel que $\mathcal{B}_u$ soit une base de E, on dit que f est cyclique.

1. Montrer que si $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur cyclique.
2. Soit f cyclique ; justifier que B_u est une base.
3. Soit f un endomorphisme nilpotent. Montrer l'équivalence suivante : f est cyclique si, et seulement si, f est nilpotent d'indice n.
4. Soit f cyclique.
   a. Écrire la matrice de f dans la base B_u et montrer que $\forall k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}\,(f - kId_E) \geq n - 1$.
   b. Montrer que $\mu_f = \chi_f$.
5. On suppose que f est diagonalisable et cyclique.
   a. Montrer que toutes ses valeurs propres sont simples.
   b. On note e_i un vecteur propre associé à la valeur propre k_i ; montrer que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i$ est cyclique.
6. Montrer que si f est un endomorphisme cyclique, alors
   $\mathbb{R}[f] = \{P(f),\ P \in \mathbb{R}[X]\} = \{v \in \mathcal{L}(E),\ f \circ v = v \circ f\}$.

<u>Ex 31</u> : [CCP] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que :
$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n$.

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   a. Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible.
   b. Montrer que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.
   c. Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.
   d. Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1}$ et $\widetilde{P^{-1}}$.
2. Soient A et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   a. Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \times \widetilde{A}$.
   b. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\widetilde{A}P$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   a. Montrer que A diagonalisable implique que $\widetilde{A}$ diagonalisable.
   b. La réciproque est-elle vraie ?

<u>Ex 32</u> : [CCP] On considère la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$.

1. Montrer que $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Calculer P_1 et P_2.
2. On considère $x \in \,]-2, 2[$ et on pose $x = 2\cos a$, avec $a \in \,]0, \pi[$. Montrer que $P_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)a}{\sin a}$.

3. En déduire que A_n est diagonalisable.

Ex 33 : [CCP]

1. Dans cette question uniquement, A est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^2 puis trouver A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. A est-elle diagonalisable ? Trouver une matrice diagonale semblable à A.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.
   a. Montrer que A est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ (matrice notée B dans la suite de l'exercice). En déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
   b. En déduire une expression de $\exp(A)$.
   c. Trouver une relation entre $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

Ex 34 : [TPE] Trouver les solutions de l'équation $X + {}^tX = \mathrm{Tr}(X)M$ où M est une matrice carrée.

Ex 35 : [IMT] Soient E $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^2 = -Id_E$.

1. On suppose que $\dim E = 2$, montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$.
2. Montrer que $\dim(E)$ est paire.
3. Montrer que si $a \neq 0$, $\big(a, f(a)\big)$ est libre ; on pose $F(a) = vect\big(a, f(a)\big)$.
4. Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$ tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F(a_i)$.
5. Trouver une base dans laquelle la matrice de f est simple.

Ex 36 : [IMT] Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Séance du 01/06 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 37 : [CCP]

1. Convergence de $\sum \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N}$.
   Que peut-on en déduire sur $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?

Ex 38 : [CCP]

1. Convergence simple de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$ défini pour $n \geq 1$.
2. Montrer que sa somme S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Donner sa limite en $+\infty$ et en 0.
5. Donner un équivalent de S en $+\infty$.
6. (BONUS) À l'aide d'un encadrement de S par une comparaison série et intégrale, donner un équivalent de S en 0.

Ex 39 : [CCP] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = x(1+n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme ?
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x$.

Ex 40 : [CCP] Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $t \in]0,1[$, écrire $\dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme de série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(t)$. Démontrer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Ex 41 : [IMT] On pose : $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, $a > 0$. Calculer alors $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que : $\forall x > 0,\ f'(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} f''(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire l'expression de $f'(x)$ en fonction de x, puis de $f(x)$ comme intégrale sur $[x,+\infty[$.

Ex 42 : [CCP]

1. On pose : $$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases} \end{array}.$$

- ***a.*** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
- ***b.*** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
- ***c.*** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$.

2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$.

- ***a.*** Calculer I_0 et I_1.
- ***b.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
- ***c.*** Trouver I_n en fonction de n.
- ***d.*** En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ex 43 : [IMT] On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ à termes strictement positifs et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ avec v_n définit par :
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$

1. Dans cette question uniquement, $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$ quand $n \to +\infty, \alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$.

2. On suppose que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergent. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

3. Montrer que si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Séance du 03/06 : Réduction

Ex 44 : [CCP]

1. Montrer que le polynôme $P = X^5 + 2X + 1$ admet une unique racine réelle strictement négative.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{R})$ telle que P soit annulateur de A. Que peut on en déduire sur les valeurs propres de A ? Montrer que $\det(A) < 0$.

Ex 45 : [CCP]

1. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres et la matrice de passage.

2. On donne $B = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer Q telle que $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

3. Montrer que B est trigonalisable si et seulement si A l'est, puis que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Ex 46 : [CCP] On note $M = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de taille n dont les coefficients diagonaux valent 2, $m_{ii+1} = 1$, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, tous les autres étant nuls.

1. Montrer que $F_k = \operatorname{Ker}\left((M - 2I_n)^k\right)$ est stable par M et déterminer sa dimension.

2. Trouver le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de M.

3. Soit F un sous-espace de dimension k stable par l'endomorphisme canoniquement associé à M. On note v la restriction à F de l'endomorphisme canoniquement associé à M.
Donner le polynôme caractéristique de v et en déduire que $F = F_k$.

Ex 47 : [CCP] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; on étudie l'équation (E) : $\quad M^2 + M = A \quad$ d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1. On suppose que M vérifie l'équation (E). Déterminer les valeurs propres possibles de M.

2. *a.* En utilisant le déterminant de A, montrer qu'une valeur propre de M appartient à $\{-1, 0\}$.

   b. Qu'en déduit-on sur le polynôme caractéristique de M ?

   c. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Trouver quatre matrices solutions de (E).

Ex 48 : [IMT]

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (on ne cherchera pas à calculer P^{-1}).

2. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM + MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel à déterminer.

3. Montrer que $\phi(M) = AM - MA$ définit un endomorphisme dont on donnera le rang.

Ex 49 : [IMT] Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, telle que $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{Tr} A = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Ex 50 : [IMT 2]

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $u : M \mapsto aM + b^tM$ avec $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Donner sa trace et son déterminant.

Séance du 07/06 : Séries entières

Ex 51 : [CCP] On donne $d_0 = 1$, $d_1 = \dfrac{1}{2}$ et $d_n = \begin{vmatrix} \dfrac{n}{n+1} & \sqrt{\dfrac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1}{n+1}} & \dfrac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dfrac{2}{3} & \sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\dfrac{1}{3}} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}$.

1. Calculer d_2 et d_3.
2. Montrer que $\forall n \geq 2$, $(n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|d_n| < 1$ et en déduire une information sur le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} d_n x^{n+1}$; on notera S la fonction somme définie sur $]-R, R[$.
4. (BONUS) Montrer que $(1-x)S'(x) - xS(x) = 1$, pour $x \in]-1, 1[$.
5. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $S(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1-x}\cdot$ Déterminer d_n.

Ex 52 : [CCP]

1. Quel est le rayon de convergence de $\sum \ln(n)x^n$? On note g sa somme.
2. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $(x-1)g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.
3. En remarquant que $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right) = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, déterminer un encadrement de $(x-1)g(x)$ pour $x \in]0, 1[$.
4. En déduire un équivalent de $g(x)$ quand $x \to 1$.

Ex 53 : [CCP] Donner le DSE des fonctions $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ et $g : x \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Ex 54 : [CCP] Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. L'objectif de cet exercice est d'exprimer f avec deux méthodes différentes.

1. Déterminer D le domaine de définition de f.
2. Méthode 1 :
   - **a.** Décomposer $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)}$ en éléments simples.
   - **b.** En déduire une expression de f sur D.
3. Méthode 2 :
   - **a.** Calculer f' et f''.
   - **b.** Donner une expression de f'' puis de f' sur $]-1, 1[$.
   - **c.** En déduire f.

Ex 55 : [CCP] Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on étudie la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{x^n}{n^\alpha}$

1. Étudier la convergence simple de la série en fonction de α. On note D_α l'ensemble des valeurs de x telles que la série converge, et $S_\alpha(x)$ la somme de la série.
2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme de la série sur D_α ?
3. Pour quelles valeurs de α la somme S_α est-elle continue sur D_α ?

Ex 56 : [ENSEA] Développement limité à l'ordre 6 en 0 de $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

Ex 57 : [TPE] Montrer que la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$, converge (on pourra utiliser $f(x) = \sum u_n x^n$).

Séance du 09/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 58 : [CCP] On se place dans un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$ de dimension n. On pose p un projecteur orthogonal de rang r et $C = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ sa matrice dans une base orthonormée $(e_i)_{1\le i\le n}$.

1. Soit A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer $Tr(AB) = Tr(BA)$ et en déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
2. Démontrer $Tr(C) = r$
3. Soit $x \in E$ montrer $(p(x)|x) = \|p(x)\|^2$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(p(e_i)|e_i) = r$ puis $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} c_{i,j}^2 = r$.

Ex 59 : [CCP] On dit qu'un endomorphisme symétrique u de E euclidien est positif si $\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0$.
On dit que u est défini positif s'il est positif et $(u(x)|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

1. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives et qu'il est défini positif si aucune d'elle n'est nulle.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E ; montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x|e_k)e_k$ est symétrique et défini positif.
3. Montrer qu'il existe g symétrique et positif tel que $g^2 = f^{-1}$.
4. Montrer que $\big(g(e_1)\ldots, g(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Ex 60 : [CCP] Soient E un espace euclidien de dimension n et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E et $D = vect(u)$, avec $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ke_k$.

1. Donner la matrice du projecteur orthogonal p sur D dans la base B.
2. Donner χ_p et $Sp(p)$.
3. Soit $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$. Calculer $d(v, D)$.

Ex 61 : [CCP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ de rang m.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXAX > 0$.
2. Justifier que $m \leq n$. Que peut-on dire de l'application linéaire canoniquement associée à B ?
3. Montrer que la matrice par blocs $C = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer C^{-1} lorsque $m = n$.

Ex 62 : [CCP]

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n, dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, noté T_n^+, sont des sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et prouver que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}$.
2. Montrer que, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n^+$ uniques, telles que $A = OT$ (on pourra s'intéresser à une base orthonormale donnée par Gram-Schmidt).

Ex 63 : [CCP]

1. Montrer que $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Trouver a et b réels tels que $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ soit minimal, d'abord en utilisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, puis en montrant que $X^2 - aX - b \in \mathbb{R}_1[X]^{\perp}$.

Ex 64 : [Navale] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $Sp(u) \subset [0, 2]$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u - 2Id)$.

Séance du 11/06 : Équations différentielles, calcul différentiel

---

Ex 65 : [CCP]

1. Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x\left[(\ln x)^2 + y^2\right]$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Admet-elle un extrémum global ?
3. Si (a, b) est un point critique, quelle est l'équation du plan tangent à la surface Σ définie par f en $\big(a, b, f(a, b)\big)$?
4. Quel est le plan tangent en $(1, 0)$?
5. Donner la différentielle de f en $(1, 1)$.

Ex 66 : [CCP]

1. Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; donner la définition de « f admet une limite en (x_0, t_0) ».
2. Étudier la continuité de f, définie par $f(x, t) = \dfrac{x^3 + t}{x^2 + t^2}$ si $t \neq 0$ et $f(x, 0) = x$.

Ex 67 : [TPE] Trouver les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = x$.

Ex 68 : [IMT] On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + \operatorname{sh}(x)y' + y = 0$.

1. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $z : x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution paire valant 1 en 0 sur $\mathbb{R}$.

Ex 69 : [St Cyr]

1. Trouver les fonctions polynomiales vérifiant $xy' - y + y^2 - x^2 = 0$.
2. On pose $y = \phi + \dfrac{1}{z}$ où ϕ et y sont solutions, avec ϕ polynomiale ; écrire l'équation différentielle dont z est solution, la résoudre, en déduire y.

Ex 70 : [St Cyr]

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et donner la matrice de passage P.
2. Traduire matriciellement le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} f' & = & 3f - h \\ g' & = & -f + 2g + h \\ h' & = & f + h \end{array}\right.$.
3. On pose $Y = P^{-1}X$; résoudre le système vérifié par Y et en déduire X.

Ex 71 : [ENSEA] Déterminer les fonctions Ψ de classe C^1 de $]0, +\infty[^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall (x, y) \in\ ]0, +\infty[^2 \quad x\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Séance du 15/06 : Variables aléatoires

Ex 72 : [CCP] Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, suivent une loi de Bernoulli de même paramètre p.

1. Déterminer la loi suivie par $Y_n = X_nX_{n+1}$ et en déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Déterminer $cov(Y_i, Y_j)$ pour $i \neq j$; les Y_n sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
4. On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}S_n$; montrer que $\forall a > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(|Z_n - p^2| \geq a) = 0$.

Ex 73 : [CCP] Soit X_n une variable aléatoire de probabilité uniforme, telle que $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}$.

1. On note $G_{X_n}(t) = E(t^{X_n})$; exprimer sous forme polynomiale $G_{X_n}(t)$, $G'_{X_n}(t)$ et $G''_{X_n}(t)$.
2. En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
3. On choisit $n = 4$; Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que X_4.
4. Exprimer $G_{Y+Z}(t)$ en fonction de $G_Y(t)$ et $G_Z(t)$; en déduire la loi de $Y + Z$.
5. Prouver qu'il existe au moins un n tel que $P(|X_n - E(X_n)| \geq n) \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Ex 74 : [CCP] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
Soient $i, j \in [\![1, n+1]\!]$. On donne $P(X = j, Y = i) = \lambda\dbinom{n}{i-1}\dbinom{n}{j-1}$.

1. Déterminer λ.
2. Donner les lois de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $Z = X - 1$ et en déduire $\mathtt{E}(X)$ et $\mathtt{V}(X)$.
5. Soit $B = [P(Y = i|X = j)]_{1\leq i,j\leq n+1}$. Expliciter B, puis calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
6. B est-elle diagonalisable ? Trouver ses valeurs propres et la dimensio des sous-espaces propres associés.

Ex 75 : [St Cyr] Le nombre N de voitures passant un péage, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$; à chaque passage, un observateur lance une pièce truquée qui a la probabilité p de tomber sur pile.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles, sachant que $N = n$.
2. Donner la loi du couple (X, N) puis celle de X.
3. Donner, sans calcul, la loi de la variable aléatoire Y qui compte le nombre de faces.
4. Montrer que X et Y sont indépendantes.
5. Donner les variances de N, X, Y et les covariances de (X, N) et (Y, N).

Ex 76 : [CCP] Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soient $S = \sum_{k=1}^{n} X_k, U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U\,{}^tU$.

1. ***a.*** Si $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de probabilité de X_k^2.

b. Calculer ${}^tUU$ en fonction de S.

c. Calculer M^2 en fonction de M et S. Donner un polynôme annulateur de M. La matrice M est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de son spectre ?

2. ***a.*** Déterminer les coefficients de M.

b. Déterminer la loi de $\mathrm{Tr}(M)$, donner son espérance et sa variance.

c. Donner les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(M)$. Donner sa loi de probabilité.

3. Donner la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes.

Ex 77 : [IMT 2]

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par $P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Donner le domaine de définition de la fonction génératrice G_X, son expression et étudier sa continuité.

Ex 78 : [IMT 2] Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que $Y = \dfrac{1}{2X+1}$ admet une espérance et la calculer.

Séance du 17/06 : Espaces vectoriels normé, suites, fonctions usuelles, dérivation

---

Ex 79 : [CCP]

1. Montrer que f donnée par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! u_n \in \left[n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[,\ f(u_n) = 0$.
4. Trouver un équivalent de u_n.
5. Tracer la courbe de f et discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant $m \in \mathbb{R}$.
6. Pour $m \in]0, 1[$, donner un intervalle précis dans lequel on peut trouver les solutions de l'équation.
7. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Ex 80 : [CCP] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Énoncer et redémontrer le théorème de sommation des relations de comparaison pour les sommes partielles dans le cas divergent positif.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$, puis en déduire un équivalent de u_n.

Ex 81 : [CCP] Soient f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P un polynôme de degré impair tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$.

1. Montrer que $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a) = 0$. En déduire que f est identiquement nulle.
2. Ce résultat reste-t-il vrai si P est de degré pair ? Si oui, on donnera une démonstration, sinon un contre-exemple.

Ex 82 : [TPE] Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
Montrer que l'ensemble des solutions ne change pas si on ne suppose que f continue.

Ex 83 : [IMT]

1. Montrer que $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$ et $\|f\|_2 = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt$ sont deux normes sur $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.
2. Sont-elles équivalentes ? Donner les inégalités qui les lient.

Ex 84 : [TPE] On munit l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme infinie.

1. Montrer que $A = \{f \in E,\ f(0) = 1 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0\}$ est un fermé de E.
2. Calculer $d(0, A)$; cette distance est-elle atteinte ?
3. Mêmes questions pour $B = \{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1$.

Ex 85 : [ENSEA] Montrer que les suites de terme général $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} - \ln n$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n} - \ln n$ sont adjacentes.