CCP MP 2019

Ex 1 : Pour U et V vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on pose $M = I_n + U^tV$ et $t = \mathrm{tr}\,(U^tV)$.
Montrer que $M^2 - (t+2)M + (t+1)I_n = 0$.
En déduire les cas où M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de U et V.

Ex 2 : Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ une fonction non constante sur $M_n(\mathbb{C})$. Cette fonction vérifie ;
$\forall\ (A,B) \in M_n(\mathbb{C}),\ \ f(AB)\ = f(A)f(B)$.

1. **a.** Calculer $f(I_n)$
   b. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que A inversible implique $f(A) \neq 0$.
3. Montrer que si A et B sont semblables alors $f(A) = f(B)$
4. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant r \leqslant n-1$. On suppose A de rang r.
   a. Montrer que si $f(A) \neq 0$ alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $\mathrm{rg}\,(B) = r$.
   b. Montrer que si $f(A) \neq 0$ alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $1 \leq \mathrm{rg}\,(B) \leqslant r$.
5. Prouver la réciproque de la question 2.

Ex 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{P} = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et
$\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-espaces vectoriels de E et que : $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$.
2. Soit $x \in E$. Déterminer F_x le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x.
3. Soit $\varphi_x : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E) & \to & E \\ v & \mapsto & v(x) \end{array} \right.$.
   a. Montrer que $F_x = E$ si et seulement si $\varphi_x|_{\mathcal{P}}$ est surjective.
   b. Montrer que $F_x = E \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{C}$.

Ex 4 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de E de rang r. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, calculer $\det(Id_E + \lambda p)$.

Ex 5 : Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice représentative A, nilpotent d'indice de nilpotence p.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ soit libre
2. Que peut on en déduire sur p ?
3. **a.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   b. On se place dans le cas $p = 2$. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 6 : $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.

2. On suppose $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0, u^{n-1} \neq 0$.

  a. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}_0$ telle que $M_{\mathcal{B}_0}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  b. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inconnue.

Ex 7 : Soient $n \geq 3$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose $\operatorname{rg}(A) = n - 1$ et $\operatorname{rg}(B) = 1$.

  a. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nuls tels que $B = U^tV$.

  b. Montrer que $AB = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(A) = vect(U)$.

2. On suppose que $B =^t com(A)$.

  a. Montrer les équivalences suivantes :
  $\operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rg}(B) = n\,;\ \operatorname{rg}(A) = n - 1 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(B) = 1\,;\ \ \operatorname{rg}(A) \leq n - 2 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(B) = 0$.

  b. Montrer que tout vecteur propre pour A l'est aussi pour B. Étudier la réciproque.

  c. Exprimer $Sp(B)$ en fonction de $Sp(A)$.

  d. Exprimer χ_B en fonction de χ_A.

Ex 8 : Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $f \in E$ Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 inf(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ définie sur $[0; 1]$.

1. Montrer que g est continue.

2. Soit $x \in [0; 1]$. Tracer $t \mapsto \inf(x, t)$ sur $[0; 1]$ pour déduire une nouvelle expression de g.

3. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x \in [0; 1]$.

$$\text{On pose : } u : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 inf(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \right) \text{ définie de } E \text{ dans } E.$$

4. *a.* Montrer que u est linéaire.

  b. Montrer que u est injective.

  c. Est-elle surjective ?

5. Donner les vecteurs propres et valeurs propres de u.

Ex 9 : On donne deux complexes distincts non nuls λ, μ et deux matrices complexes carrées de taille p, telles que $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse (on pourra calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$).

2. Exprimer A en fonction de M et I_p.

3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteur.

4. M est-elle diagonalisable ? Que dire de ses sous-espaces propres ?

Ex 10 :

1. Localiser les racines de $P = X^3 - X - 1$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_A(x)$. Que vaut $\chi_A(0)$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $P(A) = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Ex 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur P de A.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, effectuer la division euclidienne de X^k par P. En déduire A^k.
3. On définit (X_n) par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et : $\forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = AX_k$. Calculer X_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Ex 12 :

1. Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel dont on donnera la dimension.
2. Si D est diagonale, à coefficient diagonaux deux à deux distincts, montrer que $(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $D_n(\mathbb{C})$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A + B$ sont-elles diagonalisables ?
4. Pour quelles valeurs de n, l'ensemble des matrices diagonalisables est-il un sous espace vectoriel ?

Ex 13 : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u admet au moins une valeur propre.
2. Soit u et v des endomorphismes de E qui commutent. On note v' la restriction de v à un sous-espace propre E_λ de u.
   a. Montrer que v' est un endomorphisme de E_λ.
   b. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.
   c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes de E, qui commutent deux à deux. Montrer qu'ils possèdent un vecteur propre en commun.

Ex 14 :

1. Soit P un polynôme réel scindé à racines simples.
   a. Montrer que P' est constant ou scindé à racines simples. On pourra utiliser le théorème de Rolle
   b. Montrer que P et P' sont premiers entre eux
   c. Montrer que il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X = XU(X)P(X) + XV(X)P'(X)$.
2. Soit A une matrice réelle de taille n et $M_A = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ de taille $2n$
   a. Soit P un polynôme, exprimer $P(M_A)$ en fonction de $P(A)$
   b. Quelle(s) condition(s) sur A pour que M_A soit diagonalisable ?

Ex 15 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n,\ A,\ A^2,\ ...,\ A^{n-1})$ est libre. Montrer que $trA = 0$.

Ex 16 : On note f l'endomrophisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto aM + b^tM$ où a et b sont des réels non nuls.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'espace S des matrices symétriques et de l'espace A des matrices antisymétriques.
2. Exprimer f en fonction du projecteur p sur S parallélement à A et de $q = Id - p$, puis exprimer f^2 en fonction de f et Id.
3. En déduire une CNS pour que f soit un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id.

Ex 17 : On note f l'endomrophisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto M + 2^tM$.

1. Donner les valeurs et les espaces propres de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Calculer $tr(f)$ et $\det(f)$.

Ex 18 : Soit F une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même telle que $F(P) = P + \dfrac{1-X}{n} \cdot P'$.

1. Vérifier F stabilise $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. On admet que F est linéaire. Donner la matrice représentative de F dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1.
4. Supposons λ une valeur propre de F associée au vecteur propre P telle que $\lambda \neq 1$. Montrer que 1 est racine de P et donner sa multiplicité.
5. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.
6. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_k de degré k tel que : $F(P_k) = \left(1 - \dfrac{k}{n}\right) P_k$.

Ex 19 :

1. Montrer que $B = \left((X-1)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $u : P \mapsto (X^2-1)P'(X) - nXP(X)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Donner la matrice de u dans B et montrer que u est bijectif.

Ex 20 : Soit a, b des réels et u de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ défini par
$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ u(P)(X) = (X-a)(X-b)P' - nXP$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.
2. u est-elle diagonalisable ? Déterminer les sous espaces propres.

Ex 21 : On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. Soit $\Phi : E \to E$ telle que $\forall P \in E,\ \Phi(P)(X) = P(X) + 2X^4 P(\dfrac{1}{X})$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres (vecteurs propres, valeurs propres) de Φ.

Ex 22 : Déterminer le noyau et l'image de g, qui à $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ associe $P(X+1) - P(X)$ (on pourra étudier le degré de P). Montrer que g est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Ex 23 : f, l'endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans une base $B = (e_1, e_2, e_3)$.
On note $E(x)$ l'espace engendré par les $f^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Donner $E(e_1)$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de f et vérifier que 2 est valeur propre.

3. Chercher les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
f est-il diagonalisable ?

4. Donner tous les x tels que $E(x) \neq E$.

Ex 24 :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2. Donner le polynôme caractéristique de $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$. Conclure à une absurdité.

3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 25 :

1. Soient deux endomorphismes f et g de E un espace vectoriel de dimension n, qui commutent et ont n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'ils ont les mêmes vecteurs propres.

2. Trouver A telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. À l'aide de la première question, trouver toutes les matrices vérifiant cette égalité.

Ex 26 : Soit $A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^k pour tout $k \geqslant 2$.

2. Trouver un polynôme annulateur de A, puis son polynôme minimal.

3. A est-elle diagonalisable ? Si oui trouver ses valeurs propres et la dimension de ses espaces propres.

4. Calculer $\det A$ et $\det(I_n + A)$.

Ex 27 : Soit b un réel et $n > 1$. On considère la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & b \end{pmatrix}$

On appelle J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Exprimer A comme combinaison linéaire de J et I_n.

2. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2. En déduire les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés à A.

3. Calculer $\det A$.

Ex 28 : On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable

2. Dans le cas où A est diagonalisable, la diagonaliser.

Ex 29 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de A.

2. Déterminer le polynôme minimal de f.

3. Rappeler le lemme des noyaux. En déduire deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ en somme directe et stables par f. On note F celui de dimension 1 et G celui de dimension 2.

4. Soit (u_1) une base de F et (u_2, u_3) une base de G. On note d l'endomorphisme tel que

$$d(u_1) = -u_1 \ , \ d(u_2) = u_2 \ , \ d(u_3) = u_3.$$

- ***a.*** Montrer que f et d commutent.
- ***b.*** On pose $n = f - d$. Calculer n^2 et montrer que n est nilpotent. Montrer que n et d commutent.
- ***c.*** Exprimer f^k pour $k \geqslant 1$ en fonction de n et d.

Ex 30 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note f et g deux endomorphismes de E et on note A et B leurs matrices dans une même base de E.

1. On suppose f et g bijectifs.

- ***a.*** Montrer : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- ***b.*** Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable alors $g \circ f$ l'est aussi.

2.

- ***a.*** Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre.
- ***b.*** Donner un exemple de matrices telles que AB soit diagonalisable mais pas BA.

Ex 31 :

1. Donner un polynôme annulateur de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tel que f^2 soit diagonalisable et $\det f^2 \neq 0$.
2. On suppose les valeurs propres de f^2 deux à deux distinctes ; montrer que f est diagonalisable.
3. On suppose $\det f^2 = 0$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, f^2 diagonalisable avec des valeurs propres non nulles deux à deux distinctes ; montrer que f est diagonalisable.

Ex 32 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. On cherche des vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}$ avec : $\forall i \in \{2; 3; 4\}$, $|\varepsilon_i| = 1$ et $\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$.
   Donner les éléments propres de A.
2. Que peut-on dire des sous-espaces propres de A ?
3. Donner χ_A.
4. Si $a = b = c = 1$, donner π_A.
5. Si $a = 1, b = 2$ et $c = 3$, donner π_A.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\deg(\pi_A) = 4$.
7. Donner une condition sur a, b et c pour que $\deg(\pi_A) = 3$.

Ex 33 : Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$ et A la matrice canoniquement associée à f.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer $\operatorname{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im}(f)$
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$
5. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f^2 + id_E)$.
6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 34 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ si et seulement si f est non diagonalisable.
2. Donner un exemple concret d'une matrice à coefficients réels de taille 3×3 de rang 1 qui ne soit pas diagonalisable.
   Justifier par une autre méthode qu'elle n'est pas diagonalisable.

Ex 35 : Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & -X + \operatorname{Tr}(X)\mathrm{I}_n \end{array}$. Montrer que u est diagonalisable. Trouver les sous-espaces propres de u.

Ex 36 : Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$ et $A \neq \pm I_n$.

1. Montrer que $\operatorname{Tr} A \equiv n \quad [2]$.
2. Montrer que $\operatorname{Tr} A \leqslant n-2$.

Ex 37 :

1. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ toutes deux diagonalisables telles que $\chi_M = \chi_N$. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $M = AB$ et $N = BA$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que n est pair.

Ex 38 : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, matrice de taille n et f l'endomorphisme associé.

1. Rang de M ?
2. Quels sont les sous-espaces propres et valeurs propres de M ?
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur l'image de f.

Ex 39 :

1. Donner une matrice 3×3 de rang 1 diagonalisable et une qui ne l'est pas ; on justifiera.
2. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que A est trigonalisable.
4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq 0$.
5. Montrer que si u, endomorphisme de E de dimension finie, vérifie $\operatorname{rg} u = tru = 1$ alors u est un projecteur.

Ex 40 : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
Calculer $\det A$.

Ex 41 :

1. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, $b \geq 0$ et $c \geq 0$, est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $\exp(A)$ pour $c = 0$ et $b \neq 0$ puis pour $bc \neq 0$.

Ex 42 : On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des complexes. On suppose que A représente un endomorphisme f d'un espace E de dimension n.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{rg}(f) = 2$.

2. On suppose que $\text{rg}(f) = 2$.

 a. Préciser $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$.

 b. Montrer que $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.

3. Montrer que λ est valeur propre de f ssi $\lambda = 0$ où $\displaystyle\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.

4. Étudier la diagonalisabilité de f.

Ex 43 : Soit un entier $n \geq 2$, $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille non nulle de réels, $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ avec $a_{i,j} = x_i x_j$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer ses éléments propres.

3. Déterminer l'endomorphisme f canoniquement associé à A.

Ex 44 :

1. Montrer que, si $A = U\,{}^tU$ avec $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.

2. Déterminer $\text{rg}\, A$ et un polynôme annulateur de A.

3. Déterminer les éléments propres de A.

Ex 45 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

 a. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices N qui commutent avec D.

 b. En déduire $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ MA = AM\}$.

 c. Montrer que $C(A) = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Ex 46 : Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i. N est nilpotente.
ii. 0 est la seule valeur propre de N.
iii. N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
iv. $N^3 = 0$.

Ex 47 : Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. On définit pour $f, g \in E, (f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$, $W = \{f \in E, f = f''\}$. Montrer que V et W sont deux sous-espaces orthogonaux, et qu'ils sont supplémentaires.
3. Montrer que $W^{\perp} = V$.

Ex 48 : On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. On pose $\Phi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. On appelle $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{I}$) le sous-espace des fonctions paires (resp impaires).

1. Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire.
3. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.
4. Déterminer $\widehat{f}$, image de $f \in E$ par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Ex 49 : Soit E l'ensemble des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit E_n l'ensemble des applications polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Soit f et g appartenant à E. On définit $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est bien définie et est un produit scalaire sur E. On note $\|.\|_2$ la norme euclidienne associée.
2. On définit T_n comme l'unique polynôme de degré n tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ. Calculer $\|T_n\|_2$.
3. Montrer que $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de E_n.
4. Soit $d_2(f) = \inf\{\|f - Q\|_2 \ / \ Q \in E_n\}$ pour $f \in E$. Justifier qu'il existe un unique vecteur $t_n(f) \in E_n$ tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f)$.
5. Exprimer $t_n(f)$ dans la base (T_k).
6. Montrer que : $\forall f, g \in E, \ (f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)g(\cos\theta)d\theta$
7. Montrer que la famille (T_n) est totale dans E.

Ex 50 :

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
2. Calculer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $S_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), trM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel dont on donnera la dimension.
4. On note J la matrice dont tous les coefficients valent 1; calculer la distance de J à H.

Ex 51 : Soit E un espace préhilbertien. On dit qu'une suite (x_n) converge fortement vers x si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ et converge faiblement vers x si : $\forall y \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - x|y) = 0$.

1. **a.** Montrer que si (x_n) converge faiblement, sa limite est unique.
   b. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que (x_n) converge fortement vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
3. Montrer qu'en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Ex 52 :

1. Montrer que $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que A est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.
2. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que deux des trois assertions suivantes impliquent la troisième :
   a. u est une isométrie.
   b. $u^2 = -id$.
   c. $\forall x \in E, < x|u(x) >= 0$.

Ex 53 : Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E euclidien de dimension $2n$ et ϕ une isométrie vectorielle de E ; on note p_F le projecteur sur F parallèlement à G et p_G le projecteur sur G parallèlement à F ; on pose $f_\phi(x) = \phi\big(p_F(x)\big) + \phi^{-1}\big(p_G(x)\big)$. On suppose que $\phi(F) = G$.

1. Montrer que $f_\phi \circ f_\phi = Id_E$, $f_\phi(F) = G$ et $f_\phi(G) = F$.
2. On suppose que $\forall (x,y) \in F^2$, $< \phi(x), y >=< x, \phi(y) >$; montrer que f_ϕ est un automorphisme orthogonal.
3. Montrer la réciproque.

Ex 54 : Soit E espace euclidien de dimension n. Soit f un endomorphisme symétrique de E. On note a la plus petite valeur propre de f, b la plus grande.

1. Montrer que a $\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant b\,\|x\|^2$.
2. Montrer que s'il existe un réel r tel que $\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \leqslant r\,\|x\|^2$, alors $r \geqslant b$.
3. Application. Soit k un réel fixé. On pose $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$. Montrer que $b \geqslant k+2$.

Ex 55 :

1. Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer $\inf\{\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 dt,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ex 56 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soient $a \in E$ un vecteur unitaire et $k \in \mathbb{R}$. On considère $f : x \mapsto x + k(x|a)a$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.

2. Pour quels k, f est-elle bijective ?

3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Ex 57 : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et a, b deux vecteurs non colinéaires de E. On considère $u : x \mapsto \langle a, x \rangle\, a + \langle b, x \rangle\, b$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.

2. Donner le noyau de u.

3. Déterminer les éléments propres de u.

Ex 58 : Soit E un espace préhilbertien réel, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que : $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2$. On pose $F = \text{Vect}((e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$.

1. Déterminer l'orthogonal de F. Que peut-on en déduire sur $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$? sur E ?

2. Soit $u : x \mapsto x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i$.

a. Justifier que u est un endomorphisme symétrique.

b. Montrer que $\forall x \in E,\ \langle u(x), x \rangle = 0$.

c. En déduire que $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i$.

3. Si E est de dimension finie n, montrer que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Ex 59 : On considère E un espace euclidien de dimension n. Soit u un endomorphisme symétrique de E. Soit p un entier naturel impair.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique v de E, tel que $v^p = u$ (penser à considérer une matrice de u).

2. Montrer que u et v ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils ont le même nombre de valeurs propres différentes.

3. v est-il unique ?

4. Maintenant on considère p entier naturel non nul pair et v un endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$.

a. Que dire de l'existence de v ?

b. Si le spectre de u est positif, que dire de v ?

c. Si de plus le spectre de v est positif que conclure ?

Ex 60 :

1. Quel est le cardinal de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?

2. On admet que $(M, N) \mapsto (M|N) = \mathrm{tr}(M\,{}^tN)$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux pour ce produit scalaire.

b. Soit $A = (a_{i,j})$ fixée. Calculer $\inf\limits_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.

Ex 61 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 +^t A = I_n$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on en déduire ?

2. Montrer que : 0 et 1 ne sont pas dans $Sp(A)$ (considérer ${}^tXAX$, avec X bien choisi).

3. Montrer que A est symétrique et expliciter sa forme.

Ex 62 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note O_n l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et E_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives, c'est-à-dire des matrices A symétriques vérifiant ${}^tXAX > 0$ pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle. Soit $A \in E_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable et que les valeurs propres de A sont strictement positives.

2. Montrer qu'il existe $B \in E_n$ telle que $B^2 = A$.

3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe $H \in E_n$ telle que ${}^tCC = H^2$; H est-elle inversible ?

4. Montrer qu'il existe $U \in O_n$ et $V \in E_n$ telles que $C = UV$.

Ex 63 : On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que T défini par $\forall f \in E, \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \displaystyle\int_0^{1-x} f(t)dt$ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $T(f)'$. T est-il injectif ? Surjectif ?

3. Montrer que $\forall f \in E$, $\|T(f)\| \leq \|f\|$ et en déduire des conditions sur les valeurs propres de T.

4. Montrer que si f est vecteur propre associé à λ (non nul), alors f est solution de :
$y''(x) + \dfrac{1}{\lambda^2} y(x) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. Donner les valeurs propres de T.

6. Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E.

7. Montrer que T est continu.

Ex 64 : On note l^∞ l'ensemble des suites réelles bornées et E le sous-ensemble de ces suites telles que $u_0 = 0$.

1. Montrer que $N_\infty(u) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est une norme sur l^∞.

2. Montrer que $N(u) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$ en est une sur E ; en est-ce une sur l^∞ ?

3. Comparer N_∞ et N dans E.

4. L'ensemble F des suites nulles à partir d'un certain rang est-il un fermé pour la norme N_∞ ? Pour la norme N ?

Ex 65 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)dx$.

1. Trouver, si $n \in \mathbb{N}$, une relation entre u_n et u_{n+1}.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
3. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifer la convergence de $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, lier v_n et u_n et exprimer v_n en fonction de n.

Ex 66 : Convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$ d'abord sur $\mathbb{R}^*$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, enfin sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Ex 67 : On pose $f_n : x \mapsto (1+\frac{x}{n})^{-n}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n). On note f sa limite. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) \geqslant f(x)$.
2. On admet que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a > 0$.
3. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Ex 68 : Soit $g_n : t \mapsto e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ définie sur $[0,1]$.

1. Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leq \dfrac{e^t}{n}$ puis que : $\forall t \in [0,1]$, $\left|e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right| \leq \dfrac{t}{n}$.
2. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions de terme général $\displaystyle\int_0^x g_n(t)dt$ sur $[0,1]$.

Ex 69 : On définit une fonction S par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

1. Montrer que S est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que S est décroissante.
3. Déterminer les limites de S en 0^+ et en $+\infty$.

Ex 70 : On définit une suite de fonctions : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$.

On note : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.
4. Donner un équivalent de f en 0.

Ex 71 :

1. Nature de $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

2. On pose, pour $n>0$, $f_n(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$. Déterminer le domaine de convergence simple de la série $\sum f_n$. A-t-on la convergence normale sur $[0,+\infty[$? A-t-on convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$, sur $]0,+\infty[$ entier ?

Ex 72 :

1. Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ sur $]0,1]$.

2. On pose $u_n(x)=x^{2n}(\ln x)^2$ pour n entier et $x\in\,]0,1]$. Pour n entier, montrer l'intégrabilité de u_n sur $]0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer une expression de $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ sous forme de somme.

4. Soit $\varepsilon>0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.

Ex 73 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $f_n(x)=\dfrac{1}{(n+x)^{3/2}+(n+x)^{1/2}}$ et on note $f=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f et montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^1$?

2. Trouver un équivalent de f en -1 et montrer que f est intégrable sur $]-1,0]$.

3. Quelle est la limite de f en $+\infty$, puis montrer qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)\sim_{x\to+\infty}\dfrac{a}{x^b}$.

Ex 74 :

1. Justifier que $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$ est définie et montrer qu'elle est paire.

2. Montrer que f est continue et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme de somme.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, justifier le sens de variation de f et donner l'allure de la courbe.

Ex 75 :

1. Domaine de définition D de $F(x)=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\ln(1+e^{-nx})$.

2. F est-elle continue sur D ? Montrer qu'elle y est monotone.

3. Déterminer $F(D)$ (on pourra montrer que $F(D)$ est un intervalle).

Ex 76 : Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$.

1. Domaine de définition, monotonie et continuité de f ?

2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Ex 77 :

1. Montrer que la série de fonctions $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, on notera f sa somme.

2. $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$? Sur $[A,0]$ pour $A>0$?

3. f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

4. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais qu'elle ne converge pas normalement.

Ex 78 : On note D le domaine de définition et S la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, avec $u_n(x) = \dfrac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer D.

2. Montrer que S est continue sur D.

3. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle uniformément sur D ?

Ex 79 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : x\mapsto \dfrac{2x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$ (on pourra considérer $t\mapsto \dfrac{2x}{t^2+x^2}$.

Ex 80 :

1. Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^n}$.

2. On pose $f_n(t) = \dfrac{t^n(\ln t)^n}{n!}$ pour n entier et $t>0$.

  a. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement et donner sa somme.

  b. Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1]$ pour tout entier n.

  c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t$.

Ex 81 :

1. Montrer que $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} e^{-nx} dx$ existe pour $p \in \mathbb{N}$ puis que $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx} dx$ existe.
2. La calculer sachant que $T(n-1,1) = (n-1)!$.
3. Montrer que $S_0 = (p+1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n$ et en déduire que (S_n) converge.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} dx = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$.

Ex 82 : On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-nt} \, \mathrm{d}t$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1}}$.
   - **a.** Prouver que I_n existe et calculer I_n.
   - **b.** Quel est le lien entre I_n et a_n ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t \, \mathrm{e}^{-t}}{1 - t \, \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t$.

Ex 83 :

1. On donne $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$; déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ (on pourra remarquer que $\forall t \in [0,1],\ \dfrac{t^n}{1+t^n} \geq t^n - t^{2n}$).
2. Déterminer son domaine de définition D. A-t-on convergence normale sur D ?
3. Montrer que la somme S est continue sur D.

Ex 84 :

1. Développement en série entière de $u \mapsto \ln(1-u)$.
2. Donner l'ensemble de définition D de $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$.
3. La convergence est-elle uniforme sur D ?
4. En déduire une expression de f.

Ex 85 :

1. Résoudre $xz'' + z' = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Chercher les solutions développables en série entière sur $]0,1[$ de $x^2(x-1)y'' - x(x+1)y' + y = 0$.
3. $\forall x \in]0,1[$, on pose $g(x) = \dfrac{xz(x)}{1-x}$; montrer que g est solution de l'équation différentielle précédente si et seulement si $xz'' + z' = 0$.
4. Montrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(]0,1[,\mathbb{R})$; quelle est sa dimension ?
5. Toutes les solutions sont-elles développables en série entière ?

Ex 86 : Ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arcsin} x$
Donner le développement en série entière de f.

Ex 87 : Soit E un ensemble à n éléments On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E.

1. Démontrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence R non nul.
3. Calculer $\mathrm{e}^x f(x)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_n.
5. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'événement "aucun des n élèves n'a sa propre copie". Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(D_n)$.

Ex 88 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que g est positive, nulle en-dehors de $[-a; a]$ avec $a > 0$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}, g_n(t) = n\,g(nt)$.

1. a. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, f * g_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g_n(x-t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f * g_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $f * g_n = g_n * f$.
   b. On pose $f_n = f * g_n$. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée.
   b. On suppose f intégrable. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   c. A-t-on toujours convergence uniforme de (f_n) vers f, lorsque f est continue ?

Ex 89 :

1. Étudier la continuité de g, définie par $g(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ si $t \neq 0$ et $g(x,0) = 0$.
2. Donner l'ensemble de définition de $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$. Montrer que h y est $\mathcal{C}^\infty$ puis calculer $h(x)$ (on pourra calculer h').

Ex 90 :

1. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3+x^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f(0)$ (on pourra poser $t = 1/u$).
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et donner l'allure du graphe de f.

Ex 91 :

1. Définition et continuité de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\ln \circ f$ est convexe.

Ex 92 : Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_F$, ensemble de définition de F.
2. Calculer $F(1)$ (on pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$).
3. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_F$.

Ex 93 : On note $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que g est définie sur $]1, +\infty[$.
2. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
3. Calculer la limite de g en $+\infty$ et expliciter g sur $]1, +\infty[$.

Ex 94 :

1. Donner l'expression de la dérivée de $f \ : \ x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$: $x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$.
3. Déterminer les solutions développables en série entière sur $]-2, 2[$.
4. Exprimer cette solution sur $]0, 2[$ à l'aide de fonctions usuelles.

Ex 95 : Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 4x+6y \\ y' & = & -3x-6y \\ z' & = & -3x-6y-5z \end{array}\right.$

Ex 96 : Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+2y-z \\ y' & = & 2x+4y-2z \\ z' & = & -x-2y+z \end{array}\right.$

Ex 97 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, soit $L_u(f) = f' + uf$.

1. Montrer que L_u est linéaire et calculer $L_u \circ L_u$.
2. Résoudre $y'' + 2xy' + x^2y = 0$.

Ex 98 : Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et y une solution définie sur $\mathbb{R}_+$, non nulle, de $y'' + qy = 0$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\},\ y(x) \neq 0$.
2. En déduire que si S est un segment de $\mathbb{R}$, alors y ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur S.

Ex 99 :

1. Trouver les solutions de l'équation homogène associée à $x^2y'' + xy' - 4y = x^n$ sous la forme $y_1(x) = x^p$, $p \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation initiale en posant $y(x) = x^2 z(x)$, puis trouver les solutions sur $\mathbb{R}$.

Ex 100 : On considère $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle ., . \rangle$, produit scalaire quelconque. Soit f un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout $h \neq 0$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, $\langle f(h), h \rangle > 0$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$.
   a. Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle.
   b. À l'aide des questions précédentes, montrer que g admet un point critique unique z_0 tel que $z_0 = f^{-1}(u)$.
   c. Montrer que g admet en z_0 un minimum global.

Ex 101 : Résoudre (en utilisant les coordonnées polaires) : $z\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = -x^2 - y^2$.

Ex 102 : On pose $f(t) = (0,0)$ si $t \in]-1, 0[$ et $f(t) = \left(t^2 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right), t^2 \cos\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$ si $t \in]0,1[$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$. Calculer $\|f'(t)\|_2^2$ pour tout $t \in]-1,1[$.
2. $f'(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ? $f(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ?

Ex 103 : Les n pièces d'un puzzle sont uniformément réparties, chacune dans une boîte d'une marque de biscuits. Y_1 compte le nombre d'achats nécessaires pour obtenir la première pièce du puzzle, Y_k compte le nombre d'achats nécessaires pour obtenir une k-ième pièce différente des $k-1$ que l'on possède déjà.

1. Les Y_k sont-elles mutuellement indépendantes ?
2. Montrer que Y_1 est une constante.
3. Donner, pour tout k, la loi de Y_k, son espérance et sa variance.
4. X compte le nombre d'achats nécessaires pour achever le puzzle ; exprimer X en fonction des Y_k et donner son espérance en fonction de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.
5. Montrer que $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
6. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ et en déduire un équivalent de $E(X)$.

Ex 104 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X \geq j)$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et suivant la même loi que X. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \max_{1\leq i\leq n}(X_i)$.
2. Exprimer $P(M_n \leq l)$ en fonction de $P(X \leq l)$, pour $l \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la loi uniforme sur $\mathbb{N}_k = [\![1, k]\!]$ avec $k > 1$. Calculer $\mathrm{E}(M_n)$.
4. On suppose que $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ X_i \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
   a. Calculer $\mathrm{E}(M_n)$.
   b. Trouver la loi de $m_n = \min_{1\leq i\leq n}(X_i)$.

Ex 105 :

1. Pour $a > 0$ développer $f(t) = \dfrac{t}{a - t^2}$ en série entière et donner le rayon de convergence.
2. Donner la loi de X, variable aléatoire telle que $G_X(t) = \dfrac{t}{2 - t^2}$; donner son espérance et sa variance.
3. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(X = n) > 0$, Y une autre variable aléatoire de même loi que X.
   On suppose X et Y indépendantes ; $X + Y$ et $X - Y$ le sont-elles (on pourra s'intéresser à $P(X + Y = 1, X - Y = 0)$) ? La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose que X et Y suivent la même loi et que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes ; comparer $V(X)$ et $V(Y)$.

Ex 106 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$ on donne $P(X = n) = \dfrac{p}{n}P(X = n - 1)$. Deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1 + X_1}$.
3. Donner la loi de $U = X_1 + X_2$ puis celle de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$.
4. X_3 suit une loi de Poisson de paramètre λ_3 indépendantes de X_1 et X_2 ; on pose $V = X_2 + X_3$. Déterminer $l(U, V) = \dfrac{cov(U, V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$.

Ex 107 : Soit $k \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}$. On pose $A_k = \begin{pmatrix} 0 & i^k \\ i^k & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner le spectre complexe de A_k^m selon la parité de k et m.
2. Soit M et K deux variables aléatoires indépendantes telles que $K \sim B(\frac{1}{2})$ et $M \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.
   a. Calculer la probabilité des événements "M est pair" et "M est impair".
   b. Soit V la variable aléatoire donnant le nombre de valeurs propres de A_K^M. Donner la loi de V.
3. Donner les couples $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \in \mathrm{Sp}(A_k^m)$.
4. En déduire la probabilité de l'événement « $1 \in \mathrm{Sp}(A_K^M)$ ».

Ex 108 : [IMT]

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \to & \mathbb{U}_n \\ z & \to & z^2 \end{array} \right.$ est-elle bijective ?

2. Trouver les n tels que $f \circ f = Id$.

Ex 109 : [IMT]

1. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

2. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Ex 110 : [Navale] Si I est un idéal d'un anneau commutatif $(A, +, .)$, on appelle radical de I et on note $\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

2. Déterminer les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$.

Ex 111 : [TPE] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel qu'il $Q \in \mathbb{Q}[X]$ non nul, avec : $Q(\alpha) = 0$ (un tel nombre est dit algébrique).

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d son degré.
2. On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \{P(\alpha) = 0, P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha) = 0, P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \mathbb{Q}[\alpha]$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

Ex 112 : [IMT 2]

1. On note $P_a(X) = X - e^{ia}$; calculer $P_a P_{-a}$.

2. Décomposer $X^{2n} - 2\cos(an)X + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.

Ex 113 : [St Cyr] On donne $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2, P_3, P_4.

2. Écrire une fonction récurrente en PYTHON qui renvoie P_n en prenant n pour argument.

3. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument un réel x et un polynôme P (sous forme de suite), et qui renvoie $P(x)$.

4. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

5. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$ est racine de P_n. Factoriser P_n.

Ex 114 : [ENSEA] On définit la suite de polynômes telle que : $H_0 = 1$ et $H_{n+1}(X) = XH_n(X) - H_n'(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer H_1 et H_2.
2. Expliciter, en justifiant, le degré de H_n.
3. Montrer que pour tout entier n non nul, $H_n'(X) = nH_{n-1}(X)$.
4. En déduire que $H_n(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}(a)X^k$. On pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

Ex 115 : [ENSEA] On donne une suite (a_n) réelle, on pose $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ et on note L le forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $L(X^k) = a_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L\big((X+1)^n\big) = b_n$.
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$.

Ex 116 : [CCE] On considère deux entiers naturels non nuls n et p.

1. On suppose que n divise p, montrer que $X^n - 1$ divise $X^p - 1$.
2. On note d le pgcd de n et p, calculer le pgcd et $X^n - 1$ et $X^p - 1$.

Ex 117 : [CCE] Soit des entiers naturels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, deux à deux distincts. On note $P = -1 + \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$. On suppose que l'on peut décomposer P en produit QR de polynômes à coefficients entiers, démontrer qu'un des deux polynômes et de degré n.

Ex 118 : [IMT 2]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $4X^4 + 3X^2 + 1$.
3. Trouver deux diviseurs de 40301.

Ex 119 : [IMT 2] Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & E \\ z & \mapsto & \begin{pmatrix} Re(z) & Im(z) \\ -Im(z) & Re(z) \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Montrer que φ est un isomorphisme d'anneaux.

Ex 120 : [BECEAS] Soit M une matrice qui n'est pas une homothétie, Montrez que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ex 121 : [IMT 2] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est inversible ou nulle si et seulement si $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$.

Ex 122 : [Navale] Soient A et B matrices complexes de taille n.

1. On suppose que $AM = MB$ si et seulement si $M = 0$; montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $AN - NB$.
2. On suppose que A et B n'ont aucune valeur propre commune ; montrer que $AM = MB$ si et seulement si $M = 0$.
3. Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Ex 123 : [TPE]

1. Montrer que si f est de rang 1 dans E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, alors dans n'importe quelle base de E, il existe $(U, V) \in (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})^2$ tels que sa matrice s'écrive $M = U^tV$.
2. Donner $\mathrm{tr}\, M$ et calculer M^k en fonction de k, M et $\mathrm{tr}\, M$.
3. Donner l'image et le noyau de M.
4. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $\mathrm{rg}\,(AB - BA) = 1$; que dire de $(AB - BA)^2$?

Ex 124 : [IMT 2] On note $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) /\ f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$ on définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}\ dt$.

1. Montrer que $T(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de T.

Ex 125 : [IMT] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u.
   Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.
2. Calculer v^2.
3. Montrer que le rang de u est pair.
4. Retrouver ce résultat d'une autre manière, en étudiant la diagonalisabilité de la matrice de u dans une base de E.

Ex 126 : [Navale] Deux endomorphismes f et g d'un espace E de dimension finie vérifient $f^2 = g^2 = Id$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.
Montrer que E est de dimension paire $2p$ et qu'il existe une base de E dans laquelle f et g ont pour matrices respectives $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 127 : [IMT] Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme diagonalisable de E. On pose : $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = u \circ f$.

1. Montrer que φ est diagonalisable.
2. Donner ses éléments propres.

Ex 128 : [IMT 2]

1. Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent d'indice p d'un $\mathbb{R}$-espace E, il n'est ni injectif, ni surjectif.
2. On suppose que $p = \dim E$.
   a. Montrer que $\exists x_0 \in E$ tel que $B = \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big)$ soit une base de E et écrire la matrice de f dans B.
   b. f est-il diagonalisable ?
   c. Montrer que : $\forall k \in [\![0, p]\!],\ \dim \operatorname{Ker}(f^k) = k$.

Ex 129 : [IMT] Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(u)_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$; montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont on donnera les valeurs propres et les vecteurs propres.

Ex 130 : [IMT]

1. Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ représenté par $A = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & 2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
2. En déduire les valeurs propres de f.

Ex 131 : [ENSEA] Déterminer le rang, l'image et le noyau de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Est-elle diagonalisable ?

Ex 132 : [IMT] Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre. Montrer que $\operatorname{tr} A = 0$.

Ex 133 : [TPE] Montrer de deux manières différentes de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex 134 : [ENSEA] Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 + 4A - 12I_3$. En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, la diagonaliser.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 135 : [IMT] Soit $n \geqslant 2$ et considérons $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que la matrice A est nilpotente.

Ex 136 : [IMT] Montrer que A est semblable à $2A$ si et seulement si A est nilpotente.

Ex 137 : [IMT 2] Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Com}(A)$ sa comatrice. Calculer $\mathrm{Sp}(\mathrm{Com}(A))$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A)$.

Ex 138 : [St Cyr]

1. Donner le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Ex 139 : [ENSEA]

1. Donner les polynômes caractéristique et minimal de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Trouver le commutant de A.
3. Déterminer les points fixes et les sous-espaces stable de A.

Ex 140 : [ENSEA] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? Si oui la diagonaliser ou la trigonaliser.

Ex 141 : [IMT] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et que 1 ne soit pas valeur propre de A. Montrer que A est diagonalisable.

Ex 142 : [TPE] Soient n et q dans $\mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^q = I_n$. Montrer que $\dim(E_1(A)) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} tr(A^k)$.

Ex 143 : [IMT 2] Montrer la convergence et donner la valeur des limites des suites (x_n), (y_n), (z_n) définies par : la donnée de x_0, y_0, z_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0,5x_n + 0,25y_n + 0.25z_n \\ y_{n+1} = 0,25x_n + 0,5y_n + 0,25z_n \\ z_{n+1} = 0,25x_n + 0,25y_n + 0,5z_n \end{cases}.$$

Ex 144 : [IMT 2] On donne $u_0 = v_0 = w_0 = 1$, $\begin{cases} u_{n+1} &= v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + w_n \\ w_{n+1} &= v_n + u_n \end{cases}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
Trouver une matrice A telle que $X_n = A^n X_0$ et en déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Ex 145 : [IMT 2]

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$ est inversible.
2. Dire pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, A est diagonalisable.

Ex 146 : [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que A possède n valeurs propres distinctes. On pose $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de B.
2. Donner les conditions de diagonalisabilité de B.

Ex 147 : [IMT] On note P_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{0, 1\}$, tel qu'il n'y ait qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne. Montrer que toute matrice de P_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Ex 148 : [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 = A + I_n$; montrer que $\det A > 0$.

Ex 149 : [IMT] $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $A^3 = A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Ex 150 : [IMT 2] Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' - (X-1)P' + P \end{array}$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\Phi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \Phi(P) \end{array}$ est diagonalisable.

Ex 151 : [TPE] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit $u : E \to E$ défini comme suit : si $P \in E$, $u(P)$ est le reste de la division de P par $X^2 - X + 1$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer le spectre de u.
3. u est-il diagonalisable ?

Ex 152 : [Navale] On appelle groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit et qui munie de la loi induite est un groupe.
Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. A appartient à un groupe multiplicatif G de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$;
3. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$;
4. $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$;
5. $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$;
6. Il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AX = XA$; $A^2X = A$; $X^2A = X$.

Ex 153 : [CCE] Soit A et B deux matrices à coefficients réels carrées d'ordre 3. On suppose que $\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Montrer que pour tout réel x, $\det(A+xB) = 0$.

Ex 154 : [IMT]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et m le polynôme minimal de M, de degré d.
   Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k \in \mathbb{C}_{d-1}[M]$ où $\mathbb{C}_{d-1}[M] = \{P(M), P \in \mathbb{C}[X]/\deg(P) \leqslant d-1\}$.
2. En déduire $\exp M$.

Ex 155 : [IMT]

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{k+2} - 3A^{k+1} + A^k = 0$ et en déduire A^n.

Ex 156 : [IMT 2] On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$, et on définit alors $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.
2. Exprimer χ_B en fonction de χ_A. Que dire des valeurs propres de B ?
3. On note $C = B^2$. Calculer C. Montrer que A et C ont les mêmes polynômes annulateurs.

Ex 157 : [Navale] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que $Sp(M) = \{1\} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{tr}(M^k) = n$.

Ex 158 : [IMT 2] Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit k un scalaire différent de -1. Soit a un vecteur de norme 1. On définit : $\forall x \in E,\ f(x) = x + k(x \mid a)\, a$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.
2. Montrer que f est un automorphisme.
3. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f.

Ex 159 : [IMT 2] Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose ${}^tA = A$ et $A^2 = A$. On note p l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} p$ est orthogonal à $\operatorname{Im} p$. Quelle est la nature de p ?
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
3. En utilisant $x = (1, 1, \dots, 1)$, montrer que la somme des coefficients de la matrice A est inférieure ou égale à n.
4. Donner les conditions sur ces coefficients pour que la somme soit égale à n.

Ex 160 : [Navale] Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que ${}^tAA$ est diagonalisable.
2. Montrer l'existence de $(X_1, \dots, X_n)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $(AX_1, \dots, AX_n)$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Ex 161 : [IMT] Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (A est symétrique réelle avec un spectre inclus dans $\mathbb{R}_+^*$). Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable.

Ex 162 : [TPE] Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ comparer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} {}^tAA$ ainsi que $\operatorname{rg} A$ et $\operatorname{rg} {}^tAA$; en déduire que pour $n \leq p$, $\det {}^tAA \geq 0$.

Ex 163 : [IMT]

1. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et telle que pour tout entier n, on ait la relation : $\displaystyle\int_a^b f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire sur f ?
2. On note F l'ensemble des fonctions polynomiales et on définit sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ le produit scalaire suivant : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $F^\perp$.

Ex 164 : [IMT]

1. Quelles sont les matrices triangulaires de $O_n(\mathbb{R})$? Combien y en a -t-il ?
2. Quelle est la trace maximale d'une matrice de $O_n(\mathbb{R})$?

Ex 165 : [IMT] Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & -\sin\left(\frac{a}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{a}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n$.

Ex 166 : [IMT 2] Soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$. Nature géométrique des endomorphismes associés ?

Ex 167 : [Navale] Si p et q sont deux projecteurs orthogonaux de E euclidien, montrer que :
$Im(p) \subset Im(q) \Leftrightarrow \|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Ex 168 : [Navale] On munit E euclidien d'une base quelconque $(e_1, \dots, e_n)$.

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont strictement positive.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g tel que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $\big(g(e_1), \dots, g(e_n)\big)$ est une base orthonormale de E.

Ex 169 : [IMT 2]

1. Montrer que u, projecteur orthogonal de E euclidien est symétrique.

2. Montrer que f, canoniquement associé à $A \in S_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A^4 = A$ et $trA = n-1$, est un projecteur orthogonal dont on précisera le rang et le noyau.

Ex 170 : [IMT] Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que $(x,y) \mapsto (f(x)|y)$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g de E à valeurs propres strictement positives telles que $f = g^2$.

Ex 171 : [St Cyr]

1. Montrer que : $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t) = P(0)$.

2. Montrer que Q est scindé à racines simples dans $[0,1]$.

Ex 172 : [IMT] Pour a et b donnés dans $\mathbb{R}^n$, f défini par $f(x) =< a, x > b$ est-il diagonalisable ?

Ex 173 : [IMT] Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x$.

Ex 174 : [IMT] Déterminer tous les n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

Ex 175 : [IMT 2] Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

1. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace de E stable par f. Montrer que F admet un supplémentaire stable par f.

2. On note, pour x et $y \in E$, $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{g\in G} \langle g(x), g(y) \rangle$. Montrer que ceci définit un produit scalaire.

3. Soit F un sous-espace de E stable par tout $g \in G$. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tout $g \in G$.

Ex 176 : [IMT 2]

1. Montrer sans calcul que $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

2. Montrer que, dans une base orthonormale, A est symétrique si et seulement si l'endomorphisme associé l'est.

3. Montrer que les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Ex 177 : [IMT]

1. Que dire de la matrice, dans une base orthonormée, d'un endomorphisme f de E euclidien, vérifiant $\forall (x,y) \in E^2$, $< f(x), y >= - < x, f(y) >$? Le démontrer.

2. Montrer que, si $\dim E = 2$, l'ensemble $A(E)$ de ces endomorphismes est inclus dans $C(E)$, celui des endomorphismes g qui commutent avec tout élément f de $A(E)$ (on pourra commencer par déterminer $C(E)$).

Ex 178 : [IMT] Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3 + A + I_n$, montrer que : $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $A = P(B)$.

Ex 179 : [IMT] Soit B une matrice symétrique positive ($Sp(B) \subset \mathbb{R}_+$).

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} \geqslant 0$.

2. Soit D une matrice diagonale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
Montrer que $0 \leqslant \mathrm{Tr}(DB) \leqslant \mathrm{Tr}(D)\,\mathrm{Tr}(B)$.

3. Soit A une matrice symétrique positive. Montrer que $0 \leqslant \mathrm{Tr}(AB) \leqslant \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.

Ex 180 : [Navale] Si u est un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien, montrer que $u \circ u = Id$ si et seulement si u est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ex 181 : [TPE]Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E, s la réflexion d'hyperplan H et $f \in O(E)$.

1. Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale et en déterminer les sous-espaces propres.

2. Déterminer les éléments de $O(E)$ qui commutent à toutes les symétries orthogonales.

Ex 182 : [IMT]

1. Montrer que toute application continue f définie sur le segment $[0, 1]$ et telle que $f(0) = 0$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_n$ sur $[0, 1]$ avec $Q_n(0) = 0$.

2. Soit $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que G est dense dans F.

Ex 183 : [TPE] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ex 184 : [IMT] Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f" - 5f' + 6f \geq 0$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Montrer que $f(x) \geq 3\exp(2x) - 2\exp(3x)$ pour tout x positif

---

Ex 185 : [St Cyr] Montrer que f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est convexe si et seulement si $\forall a \in I$, $\forall r > 0$, $[a - r, a + r] \subset I$, $\displaystyle\int_{a-r}^{a+r} f(t)dt \leq 2rf(a)$ (on pourra appliquer la formule de Taylor-Young à une primitive de f).

Ex 186 : [IMT]

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$. On note cette solution x_n.
2. Déterminer les quatre premiers termes du développement asymptotique de x_n.

Ex 187 : [ENSEA] Convergence et limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}\cdot$ Même question pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).\sin\left(\frac{k}{n}\right)\cdot$

Ex 188 : [IMT] Soient (U_n) une suite à valeurs dans E de dimension finie et $x \in E$ tel que $(\|U_n - x\|)$ converge.
Montrer que (U_n) admet au moins une valeur d'adhérence puis qu'elle converge.

Ex 189 : [IMT 2] Soit E un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition d'un ouvert de E.
2. Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert de E.
3. Montrer que tout ouvert est réunion de boules ouvertes.

Ex 190 : [IMT] Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et on pose $N(f) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_0^1 t^n f(t)dt\right|$. Montrer que N définit une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Ex 191 : [IMT] Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$. On note $F = vect(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$. Pour $f \in F$, on pose $N(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$. Montrer que N définit une norme sur F.

Ex 192 : [TPE]

1. Montrer que $N_1(P) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \displaystyle\sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Convergence de la suite de terme général $P_n(X) = \dfrac{1}{n}X^n$ pour N_1 et N_2.

Ex 193 : [IMT] Montrer que si F est un fermé et K un compact de E, espace vectoriel normé, $K + F$ est un fermé de E. Montrer que cela est faux si on suppose K seulement fermé.

Ex 194 : [IMT] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$.
On pose $A = \{f \in E/\ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f \geqslant 1\}$.

1. Montrer que A est fermé dans E.
2. Soit $f \in A$, montrer que $\|f\|_\infty > 1$.
3. Calculer $\mathrm{d}(0, \mathrm{A})$.

Ex 195 : [IMT]

1. Montrer que $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f(x)\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$ si f est continue.
2. Donner un exemple de fonction non continue pour laquelle Γ reste un fermé.
3. Si f est non continue et bornée, Γ est-il fermé ?

Ex 196 : [Navale] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que N_1 est une norme sur E.
2. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour N_1 si :
   $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ N_1(f_{n+p} - f_n) \leqslant \varepsilon$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge pour N_1. Montrer que (f_n) est de Cauchy.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Est-ce que (f_n) converge ?

Ex 197 : [IMT] Soient $E,\ F$ deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. On suppose que f est continue, montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un fermé.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Ex 198 : [IMT]

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \cos\frac{(n+1)x}{2}.\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.
2. Résoudre l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 0$.

Ex 199 : [IMT]

1. Donner les entiers naturels n pour lesquels $u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est définie.
2. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Ex 200 : [IMT] Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a^\alpha)}$ pour $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex 201 : [Navale] Si (a_n) est une suite à temes positifs telle que $\sum a_n$ converge, a-t-on $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

Si, de plus, (a_n) est décroissante, a-t-on $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

Ex 202 : [IMT] Soit $a > 0$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 > 0$ par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

1. Étudier la convergence de (u_n) et donner sa limite.

2. On définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
Calculer v_n en fonction de n et v_0.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \sqrt{a}| \leqslant v_0^{2^n} \times 2u_1$.

Ex 203 : [ENSEA]

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)dx$ est défini pour tout n et que $u_n \leq 0$.

2. Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle tend vers 0.

3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $u_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}$.

4. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$.

Ex 204 : [IMT]

1. Déterminer suivant α, l'éventuelle limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^\alpha}$.

2. Étudier $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Ex 205 : [St Cyr]

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Étudier la monotonie de la suite de terme général I_n.

3. Montrer que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ et en déduire I_{2p}.

4. Montrer que $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ et en déduire un équivalent de I_n.

Ex 206 : [ICNA]

1. Soit $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{k_i} \in \mathbb{C}[X]$; exprimer $\dfrac{P'}{P}$ comme combinaison linéaire des $\dfrac{1}{X-a_i}$.

2. En déduire la valeur de $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.

3. Soit f continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$; montrer que le théorème des sommes de Riemann peut s'appliquer à $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$.

4. En déduire des questions précédentes la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{dt}{x-e^{it}}$ où x est un complexe de module différent de 1.

5. Retrouver la valeur de I en utilisant une série de fonctions.

Ex 207 : [Navale] Soient f et g continues sur $[a, b]$.

1. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + xg(t))dt \geq \int_a^b f(t)dt$; déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

2. On suppose f strictement positive et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b |f(t) + xg(t)|dt \geq \int_a^b f(t)dt$.

a. Déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

b. Que peut-on dire si f est seulement positive ?

Ex 208 : [IMT] Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})dx$ suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex 209 : [IMT 2]

1. Décomposer $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2 - 2x + 5)}$ en éléments simples.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2(t^2 - 2t + 5)} \mathrm{d}t$.

Ex 210 : [Navale]

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx \leq \frac{\ln 3}{2}$.

Ex 211 : [ENSEA] Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln \frac{1 + t^2}{t^2} dt$.

Ex 212 : [IMT 2] On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - t^2)}{t^2} \mathrm{d}t$. Justifier son existence et la calculer. On pourra effectuer une intégration par parties.

Ex 213 : [CCE] Pour a réel quelconque, étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a \ln(t + \mathrm{e}^{at}) \, \mathrm{d}t$.

Ex 214 : [St-Cyr] On pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Ex 215 : [IMT] Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, pour $n \geq 2$.

Ex 216 : [IMT] Convergence de $\displaystyle\sum \frac{a^n \, 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$.

Ex 217 : [ENSEA] On considère, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \left(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) \sin\left(\ln(1+\frac{1}{n})\right)$.

1. Donner un équivalent de u_n.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Ex 218 : [CCE] Nature de la série $\sum \sin((2+\sqrt{3})^n \pi)$.

Ex 219 : [IMT 2] Déterminer en fonction de a la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$.

Ex 220 : [IMT 2]

1. Donner une condition nécessaire de convergence pour une série numérique $\sum u_n$, puis une condition suffisante. Justifier.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ en fonction de a et b.

Ex 221 : [IMT 2]

1. Énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.
2. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$.
3. Montrer qu'il existe α tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \alpha + \mathrm{o}(1)$.

Ex 222 : [IMT] Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2} \right) \mathrm{d}t$.

Ex 223 : [IMT 2] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions f_n et g_n par :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad \text{et} \quad g_n(x) = nx\cos(nx)e^{-nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple des suites (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour chaque suite, a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$? sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$?

Ex 224 : [St-Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
2. En déduire un équivalent de W_{2n+1}, puis de W_n.

Ex 225 : [IMT 2]

1. Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle.
2. Énoncé et démonstration du théorème de continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions.
3. Convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions (f_n) avec $f_n : x \mapsto \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$; y a-t-il convergence uniforme ?

Ex 226 : [IMT] Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes réels telle que $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f et $(P_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

Ex 227 : [St-Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,\pi/2]$, on pose $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$ et $g_n(x) = nf_n(x)$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geq 0}$.
2. Même question avec $(g_n)_{n\geq 0}$.
3. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Ex 228 : [IMT 2] On définit f_n par $f_n(x) = xe^{-nx^2}$. Étudier le type de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ (simple, uniforme, normale ...).

Ex 229 : [Navale] Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $f_0(x) = 0$ et $f_n(x) = f(x + \dfrac{x(1-x)}{n})$ pour n entier non nul.

1. Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Reprendre la question précédente avec $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Ex 230 : [IMT] Pour $x > 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{n!}{x^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1. Étudier la suite de terme général $\ln\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$ puis la suite de terme général $u_n(x)$.
2. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\displaystyle\sum\left(\ln\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge.
3. Donner la nature de $\sum u_n(x)$.

Ex 231 : [IMT 2] Soit $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que ζ est définie sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que ζ est continue sur $]1,+\infty[$.
3. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$, puis $\mathcal{C}^\infty$, sur $]1,+\infty[$.
4. Étudier la convexité de ζ.
5. Donner un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Ex 232 : [IMT] Étudier les convergences simple, normale et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions de terme général $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

Ex 233 : [TPE]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}\ln(x)x^{2n+2}$ si $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Ex 234 : [IMT 2] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de u_n.
2. Étudier la convergence dela suite (u_n).
3. Montrer l'existence de $c > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{c}{n}$ quand $n \to +\infty$.
4. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$?
5. Étudier la convergence en R et $-R$.

Ex 235 : [St Cyr] Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\cos\frac{t}{\sqrt{n}}\big)^{2n} f(t)dt$ est définie pour $n > 0$ puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Ex 236 : [IMT 2] $\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2} \end{array}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}\,\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? Sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$?

Ex 237 : [IMT] Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Donner un équivalent de f en 0.

Ex 238 : [IMT] Convergence simple, normale et uniforme de $\sum xe^{-n^2x}$.

Ex 239 : [IMT] Domaine de définition, continuité et dérivabilite de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \text{Arctan}\,(nx)n^2$.

Ex 240 : [IMT] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue bornée. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ex 241 : [IMT] On pose $u_n(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge et que la convergence est normale sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que $f(x) = \ln x + \displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 242 : [TPE] Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ex 243 : [IMT] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in]0,1]$, soit $f(t) = \dfrac{t^{a-1}}{1+tb}$. Montrer que :
$\displaystyle\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(nb+a)}$.

Ex 244 : [IMT] Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{(\ln t)^k}{1-t}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n!}{n^{k+1}}$.

Ex 245 : [IMT] Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{\ln t \ln(1+t^2)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis que
$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)^2}$.

Ex 246 : [IMT] Soit la somme S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\,(n)}{n(n+1)}x^n$. Calculer le rayon de convergence de S et donner la somme de cette série sur un intervalle que l'on précisera.

Ex 247 : [IMT]

1. **a.** Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ On pourra regrouper les termes deux à deux dans la somme partielle.
2. Calculer de deux manières différentes la $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Ex 248 : [IMT] La fonction F est définie par $F(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-t^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

1. Déterminer le rayon de convergence et le développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
2. Montrer que F est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence.

Ex 249 : [IMT 2]

1. Étude de l'ensemble de définition et parité de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.
2. Étude de la continuité et du caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $[-1,1]$.
3. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et exprimer f'' à l'aide de fonctions usuelles.
4. f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$?
5. Montrer que $f(x) = 3x^2 + (1-x)^2\ln(1-x) - (1+x)^2\ln(1+x)$.
6. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Ex 250 : [IMT 2] Pour $x \in]-1,1[$, soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$. Développer f en série entière. Exrpimer f au moyen de fonctions usuelles.

Ex 251 : [IMT]

1. Développer $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en série entière sur $]-1,1[$. On écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ce développement.
2. Donner un équivalent de a_n.
3. Trouver un équivalent en 1 par valeurs inférieures de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Ex 252 : [IMT] On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$.

1. Donner son rayon de convergence.
2. Convergence aux bornes ?

Ex 253 : [IMT]

1. Définition du rayon de convergence.
2. $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$; trouver une relation entre leurs rayons de convergence R_a et R_b.
3. Donner le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{n} z^n$ puis celui de $\sum \phi(n) z^n$ où ϕ est l'indicatrice d'Euler.

Ex 254 : [IMT] Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n(2n+1)}$.

Ex 255 : [IMT]

1. Rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\binom{n+p}{p}x^n$.
2. Y a-t-il convergence pour $x=R$?
3. Y a-t-il convergence normale sur $]-R,R[$?
4. Justifier que la somme S est dérivable sur $]-R,R[$.
5. Exprimer $(1-x)S'(x)$ en fonction de S et en déduire S.

Ex 256 : [IMT] Solutions développables en série entière de $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$; reconnaître les fonctions trouvées.

Ex 257 : [IMT] On donne $a_0=a_1=1$ et $a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{1}{n+2}a_n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_nx^n$.
2. On note f sa somme ; montrer que $(1-x)f'(x)-(1-x)f(x)=0$ sur $]-R,R[$ puis déterminer f.

Ex 258 : [Navale] Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum\binom{2n}{n}x^n$ et h sa fonction somme sur $]-R,R[$.

1. Déterminer R.
2. Montrer que h vérifie sur $]-R,R[$ l'équation différentielle $(1-4x)h'(x)-2h(x)=0$.
3. On pose $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}}$.
   a. Déterminer le domaine de définition de f.
   b. Montrer que f est développable en série entière en zéro et déterminer son développement en série entière.

Ex 259 : [IMT 2] Rayon de convergence et calcul de la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$, avec $a_n=\dfrac{n^2+4n-1}{(n+2)n!}$.

Ex 260 : [IMT 2] On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1 t^{xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition D_f de cette fonction.
2. Exprimer f comme somme d'une série entière au voisinage de 0.

Ex 261 : [IMT 2] On pose : $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{(t-1)t^x}{\ln(t)}dt$.

1. Montrer que $t\mapsto\dfrac{(t-1)t^x}{\ln(t)}$ est prolongeable par continuité en 1.
2. Montrer que f est définie sur $]-1,+\infty[$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$. Calculer f'.
4. En déduire une expression de f.

Ex 262 : [IMT] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, f de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et g définie sur I par $g(0)=f'(0)$ et $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ pour $x\neq 0$.
Montrer que $\forall x\in I,\ g(x)=\displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$ puis que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I.

Ex 263 : [IMT 2/ENSEA]

1. Montrer que $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$.
3. En déduire qu'il existe C dans $\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F(x)=C-\operatorname{Arctan}(x)$.
4. En déterminant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$, en déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 264 : [IMT 2] Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$.

Ex 265 : [IMT 2] Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble A sur lequel f est définie.
2. Montrer que $f\in\mathcal{C}^1(A)$ et exprimer $f'(x)$.
3. Déterminer une autre expression de $f(x)$.
4. Calcul de $\displaystyle\int_0^1\frac{1-t^2}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Ex 266 : [IMT] Soit $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 267 : [IMT]

1. Ensemble de définition I de $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)dt$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I et donner une équation différentielle qu'elle vérifie.
3. Montrer que f est développable en série entière en 0 et écrire ce développement.

Ex 268 : [IMT] On considère la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de F ?
2. F est-elle $\mathcal{C}^0$ sur $]0,+\infty[$? Est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$?
3. Limites en 0 et $+\infty$?
4. Quelles la limite de $xF(x)$ en $+\infty$? En déduire un équivalent en $+\infty$.
5. Montrer que $f(x)$ est équivalent en 0^+ à $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
6. Montrer que $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t+O(1)$ en 0^+. En déduire un équivalent de f en 0^+.

Ex 269 : [IMT] On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.
3. Monter que c'est la seule solution qui a une limite nulle en $+\infty$.

Ex 270 : [IMT]

1. Prouver que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par g.
3. En déduire une nouvelle forme intégrale de g puis un équivalent de g en $+\infty$.

Ex 271 : [IMT]

1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$ sont de la forme $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t) e^{-\sqrt{t}} dt$.
2. Montrer qu'une seule des solutions admet une limite finie en $+\infty$.

Ex 272 : [IMT] Soient $a > 0$ et $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée ; montrer que $y' - ay = h(t)$ admet une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ et la déterminer.

Ex 273 : [IMT 2] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. On considère une fonction X vérifiant $X'(t) = AX(t)$.

1. Montrer que si V est un vecteur propre de A associé à λ et si $X(0) = V$ alors $\forall t,\ X(t) = e^{\lambda t} V$.
2. De façon générale, donner l'expression de $X(t)$ en fonction de $X(0)$.

Ex 274 : [IMT 2] Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -7x(t) + 5y(t) - z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 6y(t) + 2z(t) \end{cases}$.

Ex 275 : [St Cyr] Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{lcl} x' - x + y & = & e^{2t} \\ y' - x - 3y & = & t \end{array} \right.$.

Ex 276 : [TPE]

1. Montrer que f, définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ si $(x,y) \neq (1,1)$ et $f(1,1) = 0$, est continue.
2. Montrer que f admet un maximum sur $[0,1]^2$ et le déterminer.

Ex 277 : [St Cyr] Donner les extrema de $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

Ex 278 : [IMT] On considère $S(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.

2. Calculer S sur $]-R, R[$.

On se donne une variable aléatoire X telle que, $\forall t \in [-1,1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut λ?

4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Ex 279 : [IMT] On tire simultanément deux jetons d'une urne en contenant n, numérotés de 1 à n.
Donner les lois de X, variable aléatoire représentant le plus petit des deux numéros, et de Y qui représente le plus grand. Donner $E(Y)$ et $E(Y^2)$.

Ex 280 : [IMT] Soit une expérience de Bernoulli de succès S de probabilité p, et d'échec E de probabilité q. On note X_1 la longueur de la première série et X_2 la longueur de la seconde. On attribue à la variable X_1 la valeur $+\infty$ si la série est ininterrompue et à la variable X_2 la valeur 0 s'il n'y a qu'une seule série et $+\infty$ si la deuxième série est ininterrompue.
Exemples : $SSSEESEEES...X_1 = 3, X_2 = 2; ESSSSEES...X_1 = 1, X_2 = 4$.

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Déterminer la loi conjointe de X_1 et X_2 et en déduire la loi de X_2.

3. Quelle est la loi de X_1 sachant $X_2 = k$?

4. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

5. Déterminer $cov(X_1, X_2)$.

Ex 281 : [ICNA] On doit transmettre une information I à N personnes numérotées de 1 à N ; chacune d'elles peut donner l'information reçue avec une probabilité p ou en donner le contraire avec une probabilité $1-p$; on note p_n la probabilité que la personne n donne l'information I .

1. Calculer p_2 et p_3.

2. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n puis exprimer p_n en fonction de n.

Ex 282 : [Navale] N enveloppes contiennent le message « vous gagnez un euro » et la dernière contient le message « tout est perdu ». Le joueur en tire $k \in [\![0, N+1]\!]$, s'il tire l'enveloppe « perdu », il perd tous les gains accumulés avant et le jeu s'arrête.
Donner la loi de la variable aléatoire X_k qui compte le gain accumulé pendant k tirages.
Combien d'enveloppes faut-il tirer pour maximiser ce gain ?

Ex 283 : [Navale] Un sac contient une pièce d'or et une pièce de monnaie. À chaque tirage, on ajoute 2 pièces de monnaie dans le sac puis on tire une pièce ; le jeu s'arrête dès que la pièce d'or est tirée.
Déterminer la loi de X, variable aléatoire correspondant à l'évènement : « la pièce d'or est tirée ».

Ex 284 : [IMT 2] Une puce se déplace sur trois cases C_1, C_2, C_3. Si la puce se trouve en C_1 ou C_2 au temps n, elle a équiprobabilité de se retrouver sur chaque case au temps $n+1$. Si la puce se trouve en C_3 au temps n, elle y reste. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
E_n : " La puce se trouve en C_1 au temps n ";
F_n : " La puce se trouve en C_2 au temps n ";
G_n : " La puce se trouve en C_2 au temps n ";
$u_n = P(E_n), v_n = P(F_n), w_n = P(G_n)$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de $u_n, v_n etw_n$.
2. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
3. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
4. Exprimer X_n sous forme matricielle.
5. Énoncer le théorème de continuité croissante d'une probabilité.
6. Calculer $P\left(\bigcup_{n\geq 1} G_n\right)$.

Ex 285 : [TPE] Le nombre de clients se présentant dans un magasin en une journée est la variable N qui suit une loi de Poisson de paramètre λ ; il y a m caisses dans le magasin, chaque client en choisit une au hasard de façon indépendante et on note X_1 la variable aléatoire qui représente le nombre de clients se présentant à la caisse 1.

1. Trouver la loi conditionnelle de X_1 sachant $N = n$ et en déduire la loi de X_1.
   Montrer que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes ?

Ex 286 : [TPE] Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

1. Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \mapsto E\left((X-x)^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que : $P(X \in [a, b]) = 1$. Montrer que : $V(X) \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Ex 287 : [CCE] Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On note $M = (X_i X_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Donner les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?

Ex 288 : [IMT] Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de paramètres respectifs $1/3$ et $2/3\cdot$ Déterminer la loi de $X + Y$.

Ex 289 : [IMT] Soit X un variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![0, 6]\!]$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z définies sur un même espace probabilisé telles que $X \sim Y + Z$.

Ex 290 : [IMT] Dans un jardin de $n \geq 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $\in]0,1[$ de fleurir à l'année k. Si une tulipe fleurit à l'année k, elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i. Soit enfin X la variable qui compte le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.

1. Déterminer la loi de chaque X_i. Exprimer X en fonction des X_i.
2. Pour tout k, calculer $P(X > k)$ et en déduire la loi de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Ex 291 : [IMT] X_1, X_2 et Y sont trois variables aléatoires indépendantes. X_1 et X_2 suivent une même loi géométrique de paramètre p. Y est définie telle que : $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(Y = 1) = 1/2$. On considère $M = \begin{pmatrix} X_1 & YX_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez la probabilité pour que la matrice M soit inversible.
2. Montrer que : $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$.
3. Quelle la probabilité que M soit diagonalisable.

Ex 292 : [TPE] On lance n fois un dé équilibré et on note Z le nombre de chiffres différents sortis ; que vaut $E(Z)$?

Ex 293 : [BECEAS] Soit ($\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}$) un espace probabilisé Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variable aléatoires défini sur cet espace Montrer que $A = \{\omega \in \Omega \ / \ \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0\}$ est un événement.

Ex 294 : [IMT 2] Le nombre de colis expédiés par une entreprise est représenté par la variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Un colis expédié est détérioré avec la probabilité t ; on note X la variable aléatoire qui représente le nombre de colis détériorés.

1. Donner la probabilité de $Y = k$, l'espérance et la variance de Y.
2. Rappeler la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
3. Trouver la loi conditionnelle de X sachant $(Y = k)$ et en déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre λt.

Ex 295 : [IMT 2]

1. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que leurs fonctions génératrices sont égales sur $[-1, 1]$. Montrer qu'elles suivent la même loi.
2. On considère n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli. En passant par les fonctions génératrices, déterminer la loi de la somme de ces variables.

Ex 296 : [IMT] $X_1, \ldots, X_n$, mutuellement indépendantes, suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$; on note $M = (X_iX_j)$.

1. Donner les lois de $\mathrm{rg}\, M$ et $\mathrm{tr}\, M$.
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

Ex 297 : [IMT 2] Soit deux variables aléatoires X et Y indépendantes entre elles : X suit une loi géométrique de paramètre p et Y suit une loi géométrique de paramètre q.

1. Calculer $P(X > n)$.

2. On note $Z = \min(X, Y)$, calculer la loi de Z et donner son espérance.

Ex 298 : [IMT 2/TPE] Soient X, Y deux variables indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $U = \dfrac{X}{Y}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(U)$.

2. Donner la loi de U.

3. Commenter la position de $\mathbb{E}(U)$ par rapport à 1.

Ex 299 : [IMT 2] Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

2. Quelle est la probabilité que X soit paire ?

Ex 300 : [BECEAS] Le nombre N de personnes qui arrive dans une poste suit une loi de Poisson de paramètre λ. Quand une personne arrive à la poste, elle va retirer un colis avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et faire autre chose avec une probabilité $q = 1-p$. On note X le nombre de personnes retirant un colis et Y le nombre de personnes faisant autre chose.

1. Déterminer la loi de X sachant N.

2. Déterminer la loi de X et Y.

3. Montrer que X et Y sont indépendantes.

4. Soit $t \in [-1, 1]$; déterminer $E(t^X t^Y)$.

Ex 301 : [IMT] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = I_X$. Calculer $E(Y)$.