Séance du 16/05 : Algèbre linéaire et probabilités

Ex 1 : [IMT/CCINP 2019] $X_1, \ldots, X_n$, mutuellement indépendantes, suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$; on note $M = (X_i X_j)$.

1. Donner les lois de $\operatorname{rg} M$ et $\operatorname{tr} M$.
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?
3. a. Calculer M^2 en fonction de M. Donner un polynôme annulateur de M.
   b. La matrice M est-elle diagonalisable ?
   c. Que peut-on dire de son spectre ?

Ex 2 : [CCINP 2021] $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.
(ii) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

Ex 3 : [CCINP 2021] Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soit p et q deux projecteurs de E. On suppose que $Im(p) \subset ker(q)$.

1. Montrer que $Im(p) \cap Im(q) = \{0\}$.
2. Soit l'endomorphisme $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est la projection sur $Im(p) \oplus Im(q)$ parallèlement à $ker(p) \cap ker(q)$.

Ex 4 : [CCINP 2019] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{P} = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-espaces vectoriels de E et que : $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$.
2. Soit $x \in E$. Déterminer F_x le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x.
3. Soit $\varphi_x : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}(E) & \to & E \\ v & \mapsto & v(x) \end{array} \right.$.
   a. Montrer que $F_x = E$ si et seulement si $\varphi_x|_{\mathcal{P}}$ est surjective.
   b. Montrer que $F_x = E \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{C}$.

Ex 5 : [IMT 1 2021]

1. Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & M \mapsto \operatorname{Tr}(AM) \end{array} \right.$. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
2. Déterminer toutes les formes linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(XY) = f(YX)$.

Ex 6 : [CCINP 2021] Soient f, g des endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que f est nilpotent.
2. On suppose jusqu'à la fin que $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e telle que $\mathrm{M}at_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la matrice de g dans la base e soit triangulaire supérieure de diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda, \lambda+1, \ldots, \lambda+n-1)$.

Ex 7 : [CCINP 2021] Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(u+v) \leq \dim(\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)) + \dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v))$.

Ex 8 : [IMT 1 2021] Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$L_k : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a_k) \end{array} \right.$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, L_k est une forme linéaire.
2. Déterminer le rang de $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Séance du 18/05 : Intégration

Ex 9 : [CCINP 2021]

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ converge.
2. Montrer que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est égale a l'intégrale de la question précédente.
3. Montrer que G définie pour $x \geq 0$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2} dt$ est continue.
4. Montrer que G est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer G''.
5. Montrer que G et G' admettent une limite en $+\infty$ et les calculer.
6. En déduire l'expression de G, puis la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Ex 10 : [CCINP 2021] On pose, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+t}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Calculer la limite de f en 0^+.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de f.

Ex 11 : [CCINP 2021] On pose : $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie.
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est décroissante.
4. On pose : $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.
5. Montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
6. Montrer que $g(x) - f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{2x+1}$ pour tout $x > 0$.
7. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Ex 12 : [St Cyr 2019]

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la monotonie de la suite de terme général I_n.
3. Montrer que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ et en déduire I_{2p}.
4. Montrer que $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ et en déduire un équivalent de I_n.

Ex 13 : [CCINP 2019] Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et $f \in E$ Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 inf(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ définie sur $[0;1]$.

1. Montrer que g est continue.

2. Soit $x \in [0;1]$. Tracer $t \mapsto \inf(x,t)$ sur $[0;1]$ pour déduire une nouvelle expression de g.

3. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x \in [0;1]$.

$$\text{On pose : } u : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 inf(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \right) \text{ définie de } E \text{ dans } E.$$

4. ***a.*** Montrer que u est linéaire.

b. Montrer que u est injective.

c. Est-elle surjective ?

5. Donner les vecteurs propres et valeurs propres de u.

Ex 14 : [IMT 2019]

1. Déterminer suivant α, l'éventuelle limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

2. Étudier $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Ex 15 : [Navale 2019]

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx \leq \frac{\ln 3}{2}$.

Séance du 20/05 : Algèbre générale

Ex 16 : [IMT 1 2021]

1. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.
2. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Ex 17 : [TPE 2019] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel qu'il $Q \in \mathbb{Q}[X]$ non nul, avec : $Q(\alpha) = 0$ (un tel nombre est dit algébrique).

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $\Pi(\alpha) = 0$. On note d son degré.
2. On pose $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \{P(\alpha) = 0, P \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha) = 0, P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha] = \mathbb{Q}[\alpha]$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}_{d-1}[\alpha]$ est un corps.

Ex 18 : [CCINP 2019]

1. Soit f un morphisme d'un groupe G dans un groupe G'.
   Montrer que si $x \in G$ est d'ordre fini n, $f(x)$ est d'ordre fini divisant n.
2. Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$ puis de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Ex 19 : [IMT 1 2019]

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \to & \mathbb{U}_n \\ z & \to & z^2 \end{array} \right.$ est-elle bijective ?
2. Trouver les n tels que $f \circ f = Id$.

Ex 20 : [St Cyr 2019] On donne $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2, P_3, P_4.
2. Écrire une fonction récurrente en PYTHON qui renvoie P_n en prenant n pour argument.
3. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument un réel x et un polynôme P (sous forme de suite), et qui renvoie $P(x)$.
4. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
5. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$ est racine de P_n. Factoriser P_n.

Ex 21 : [Navale 2019] Si I est un idéal d'un anneau commutatif $(A, +, .)$, on appelle radical de I et on note $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
2. Déterminer les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$.

Ex 22 : [CCE 2019] Soit des entiers naturels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, deux à deux distincts. On note $P = -1 + \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. On suppose que l'on peut décomposer P en produit QR de polynômes à coefficients entiers, démontrer qu'un des deux polynômes et de degré n.

Séance du 23/05 : Matrices et déterminant

Ex 23 : [CCINP 2021] Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre m :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2mx & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2my & + & z & = & 4m \\ x & + & y & + & 2mz & = & 2m^2 \end{array}\right.$$

Ex 24 : [CCINP 2021] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts.

On définit $V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et le vecteur colonne $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$.

1. Exprimer le produit $V(x_0, \ldots, x_n).A$ à l'aide du polynôme P.
2. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $\det(T) = 1$ et

$$V(x_0, \ldots, x_n).T = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \displaystyle\prod_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_n - x_k) \end{pmatrix}$$

3. En déduire par récurrence une expression de $\det(V(x_0, \ldots, x_n))$.
4. Soit $(r_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(r_k) \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la question 1, que P est dans $\mathbb{R}[X]$.

Ex 25 : [CCINP 2021] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\det A$ et $\operatorname{rg} A$ pour $(a, b) = (1, 2)$.
2. Calculer $\det A$ et $\operatorname{rg} A$ dans le cas général (distinguer plusieurs cas possibles selon les valeurs de a et b).
3. A est-elle inversible ?
4. Déterminer A^{-1} lorsque A est inversible.
5. A est-elle diagonalisable ?
6. Déterminer ses valeurs propres.

Ex 26 : [CCINP 2021] Soit $n \geq 2$. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-2} & a_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^p pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

2. Écrire A comme combinaison linéaire de $(J^p)_{0 \leq p \leq n-1}$.

3. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nul, on a : $Q(J) \neq 0$.

4. Quel est le degré du polynm̂e minimal Π_J de J ?

5. Calculer Π_J et χ_J.

6. Montrer que A est diagonalisable.

Ex 27 : [CCINP 2019] Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice représentative A, nilpotent d'indice de nilpotence p.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ soit libre

2. Que peut on en déduire sur p ?

3. ***a.*** Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On se place dans le cas $p = 2$. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 28 : [CCINP 2021] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) \neq 0$
Soit f définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = tr(A)M - tr(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Montrer que f est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de f.

Ex 29 : [CCINP 2019] Pour U et V vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on pose $M = I_n + UV^T$ et $t = \mathrm{tr}\,(UV^T)$.
Montrer que $M^2 - (t+2)M + (t+1)I_n = 0$.
En déduire les cas où M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de U et V.

Séance du 25/05 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 30 : [CCINP 2021]

1. Donner la définition de la convergence d'une série puis montrer que si $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

  a. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, montrer que $\lambda = 0$.

  b. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.

  c. Montrer que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge puis montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Ex 31 : [CCINP 2021] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence normale de cette série de fonctions.

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'existence de M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \forall x \in [0,A]$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)}\right| \leq \frac{M}{\ln(n)}$.

Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que, pour $n \geq 2$, et x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\dfrac{f(x)}{x} \geq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-kx}}{\ln(k)}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Ex 32 : [CCINP 2021] Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \cdot \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Ex 33 : [CCINP 2021] On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$ et on définit quand cela est possible $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f. Pour quelles valeurs de x la série de définition de $f(x)$ converge-t-elle absolument ?

2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de définition de f converge normalement sur $[1+a, +\infty[$. Que dire de f ?

3. Soit $b \in]0,1[$. La série converge-t-elle uniformément sur $[b, 1+a]$? Que dire de f ?

Ex 34 : [IMT 1 2021] Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Ex 35 : [CCINP 2019] Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$.

1. Domaine de définition, monotonie et continuité de f ?

2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Ex 36 : [IMT 2 2021] On définit la série harmonique par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

2. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = H_n - \ln(n).$$

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ.

4. On pose $w_n = u_n - \gamma$.

5. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

6. Déterminer un équivalent de $w_{n+1} - w_n$.

7. Déterminer un équivalent de w_n, puis un développement asymptotique à trois termes de H_n.

Séance du 01/06 : Réduction et probabilités

Ex 37 : [IMT 2021] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On tire les boules 2 par 2 jusqu'à ce que l'urne soit vide. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et une boule noire au i-ème tirage ?

Ex 38 : [CCINP 2019] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
Soient $i, j \in [\![1, n+1]\!]$. On donne $P(X = j, Y = i) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$.

1. Déterminer λ.
2. Donner les lois de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z = X - 1$ et en déduire $\mathtt{E}(X)$ et $\mathtt{V}(X)$.
4. Soit $B = [P(Y = i|X = j)]_{1 \leq i,j \leq n+1}$. Expliciter B, puis calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
5. B est-elle diagonalisable ? Trouver ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Ex 39 : [CCINP 2021] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes. Déterminer le nombre de $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $v^2 = u$.

Ex 40 : [CCINP 2021] On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Soit M une matrice telle que $M^2 + M = A$.
   a. Montrer que les seules valeurs propres possibles pour M sont 1, 2, -2, -3.
   b. Montrer que M est diagonalisable.
3. Quelle est la forme de ces matrices M ?

Ex 41 : [CCINP 2021] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.
2. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0_n$.

Ex 42 : [CCINP 2021] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.

1. Rappeler le lemme des noyaux dans le cas de deux polynômes.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme minimal de f soit $\pi_f = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$. Montrer qu'il existe x, y dans E non nuls tels que $f^2(x) = -x$, $f^2(y) = -4y$.
3. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E.
4. Donner la matrice de f dans cette base.

<u>Ex 43</u> : [CCINP 2021] Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, un entier $n\geqslant 3$ et $A=\begin{pmatrix} & & & c\\ & (0) & & \vdots\\ & & & c\\ b & \cdots & b & a\end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(f)=2$.

2. On suppose que $\mathrm{rg}(f)=2$.

  a. Montrer que : $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda=0$ ou $\lambda^2-a\lambda-(n-1)bc=0$.

  b. Donner les expressions des valeurs propres de A.

  c. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur a, b et c) pour que A soit diagonalisable.

<u>Ex 44</u> : [CCINP 2021] Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^4=A^2$ et $tr(A)=n$.

<u>Ex 45</u> : [CCINP 2019] Soit F une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même telle que $F(P)=P+\dfrac{1-X}{n}\cdot P'$.

1. Vérifier F stabilise $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. On admet que F est linéaire. Donner la matrice représentative de F dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1.

4. Supposons λ une valeur propre de F associée au vecteur propre P telle que $\lambda\neq 1$. Montrer que 1 est racine de P et donner sa multiplicité.

5. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

6. Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_k de degré k tel que : $F(P_k)=\left(1-\dfrac{k}{n}\right)P_k$.

Séance du 03/06 : Séries entières

Ex 46 : [CCINP 2021] Soit (E) l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.

1. Jusitifier l'existence d'une unique solution J_0 de (E) développable en série entière au voisinage de l'origine.

2. Montrer que J_0 est la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)dt$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de n. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

4. Montrer que J_0 est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))dt$.

Ex 47 : [CCINP 2021]

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \ln n\, x^n$. En déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction S définie par : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln n\, x^n$

2. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D},\ S(x) = \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

3. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

5. En remarquant que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$, déterminer un encadrement de S, puis un équivalent de S en -1.

Ex 48 : [CCINP 2021] Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1. $f(z) = \dfrac{1}{6z^2 - 5z + 1}, z \in \mathbb{C}$.

2. $g(x) = \ln\dfrac{2+x}{1-x}, x \in \mathbb{R}$.

3. $h(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)dt$, dérivable sur $\mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

Ex 49 : [CCINP 2021] Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, où z est une variable complexe et x est réelle :

1. $\sum (n+1)3^n z^{2n}$.

2. $\sum \dfrac{2^{(-1)^n}}{n} x^n$.

Ex 50 : [IMT 2021] On pose pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n+n^2 ix}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que g n'est pas développable en série entière.

Ex 51 : [CCINP 2019] Soit E un ensemble à n éléments On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E.

1. Démontrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.

2. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence R non nul.

3. Calculer $\mathrm{e}^x f(x)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_n.

5. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'événement "aucun des n élèves n'a sa propre copie". Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(D_n)$.

Ex 52 : [CCP 2019] Soient f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P un polynôme de degré impair tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$.

1. Montrer que $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$. En déduire que f est identiquement nulle.

2. Ce résultat reste-t-il vrai si P est de degré pair ? Si oui, on donnera une démonstration, sinon un contre-exemple.

Séance du 08/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

<u>Ex 53</u> : [CCINP 2021] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. On rappelle que $A_0 = 1$.

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n.

3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

<u>Ex 54</u> : [CCINP 2021] Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la matrice dans la base canonique de la projection vectorielle orthogonale p sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

<u>Ex 55</u> : [CCINP 2021] Soient $n \geqslant 3$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Donner le rang de M.

2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

3. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

<u>Ex 56</u> : [CCINP 2021] Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

1. Montrer que la matrice de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.

2. Montrer que $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ est stable par u.

3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ avec N antisymétrque et inversible.

4. Montrer que le rang de u est pair.

<u>Ex 57</u> : [IMT 2019] Soit B une matrice symétrique positive ($Sp(B) \subset \mathbb{R}_+$).

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} \geqslant 0$.

2. Soit D une matrice diagonale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
Montrer que $0 \leqslant \operatorname{Tr}(DB) \leqslant \operatorname{Tr}(D)\operatorname{Tr}(B)$.

3. Soit A une matrice symétrique positive. Montrer que $0 \leqslant \operatorname{Tr}(AB) \leqslant \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$.

<u>Ex 58</u> : [IMT 2 2019] Déterminer tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$.

<u>Ex 59</u> : [IMT 2019]

1. Quelles sont les matrices triangulaires de $O_n(\mathbb{R})$? Combien y en a -t-il ?

2. Quelle est la trace maximale d'une matrice de $O_n(\mathbb{R})$?

Séance du 10/06 : Équations différentielles, calcul différentiel et probabilités

---

<u>Ex 60</u> : [CCINP 2019] Soit une suite (A_k) d'évènements indépendants dans un espace probabilisé Ω.

On note $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $u_n = p(B_n)$.

On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(A_n) < 1$.

1. Montrer que (u_n) converge vers $p(B)$.
2. Montrer que $\sum \ln\big(1 - p(A_n)\big)$ et $\sum p(A_n)$ sont de même nature.
3. En déduire que $p(B) < 1 \Leftrightarrow \sum p(A_n)$ converge.

<u>Ex 61</u> : [IMT 2021] Soient X et Y des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y sachant $(X = k)$ est la loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Déterminer la loi de Y et son espérance.

<u>Ex 62</u> : [CCINP 2021] Soit (E) : $(x^2 - 4x)y' + (2 - x)y = 4$.

1. Trouver une solution de (E) sous la forme d'un polynôme.
2. Résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$ et $]4, +\infty[$.
3. Trouver les solutions de (E) sur $]-\infty, 4[$, $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.

<u>Ex 63</u> : [CCINP 2019]

1. Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x\left[(\ln x)^2 + y^2\right]$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Admet-elle un extrémum global ?
3. Si (a, b) est un point critique, quelle est l'équation du plan tangent à la surface Σ définie par f en $\big(a, b, f(a, b)\big)$?
4. Quel est le plan tangent en $(1, 0)$?
5. Donner la différentielle de f en $(1, 1)$.

<u>Ex 64</u> : [IMT 2 2021] Déterminer les fonctions $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle :
$(t^2 + 1)x'' - 2x = 0$.

<u>Ex 65</u> : [CCINP 2019] Résoudre (en utilisant les coordonnées polaires) : $\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) z = -x^2 - y^2$.

<u>Ex 66</u> : [St Cyr 2019] Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} x' - x + y & = & e^{2t} \\ y' - x - 3y & = & t \end{array}\right.$.

Ex 67 : [TPE 2019]

1. Montrer que f, définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ si $(x,y) \neq (1,1)$ et $f(1,1) = 0$, est continue.
2. Montrer que f admet un maximum sur $[0,1]^2$ et le déterminer.

Ex 68 : [CCINP 2019] Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et y une solution définie sur $\mathbb{R}_+$, non nulle, de $y'' + qy = 0$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\},\ y(x) \neq 0$.
2. En déduire que si S est un segment de $\mathbb{R}$, alors y ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur S.

Séance du 15/06 : Variables aléatoires

Ex 69 : [IMT 2019] Une puce se déplace sur des cases alignées, numérotées de 0 à l'infini ; elle saute d'une ou deux cases vers la droite de manière équiprobable.
On note X_n la variable aléatoire représentant la case sur laquelle se trouve la puce après n sauts.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. On note Y_n la variable aléatoire du nombre de fois où elle a sauté d'une case au cours de n sauts. Donner la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

3. Écrire X_n en fonction de Y_n. Donner l'espérance et la variance de X_n.

4. On note A_k l'évènement « la puce est sur la case k ».
Montrer que $\forall k \geq 2$, $P(A_k) = \dfrac{1}{2}P(A_{k-1}) + \dfrac{1}{2}P(A_{k-2})$ et en déduire $P(A_k)$.

Ex 70 : [CCINP 2021] On dispose d'une urne avec $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'obtention d'une boule différente de la toute première tirée, pour la première fois. On note Y_n la variable aléatoire correspondant au rang où pour la première fois toutes les boules ont été tirées au moins une fois.

1. Déterminer la loi de X_n.

2. Justifier que X_n admet une espérance finie et la calculer.

3. Calculer les lois de Y_2 et Y_3.

4. Calculer l'espérance de Y_n.

Ex 71 : [IMT 2021]
Une compétition de saut à la perche est organisée. On effectue autant de sauts que possible. Le k-ème saut a une chance sur k de réussir. Dès qu'un saut rate la compétition s'arrête. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du dernier saut réussi.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer l'espérance de X.

3. Déterminer la variance de X.

Ex 72 : [IMT 2019] Dans un jardin de $n \geq 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $\in]0,1[$ de fleurir à l'année k. Si une tulipe fleurit à l'année k, elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i. Soit enfin X la variable qui compte le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.

1. Déterminer la loi de chaque X_i. Exprimer X en fonction des X_i.

2. Pour tout k, calculer $P(X > k)$ et en déduire la loi de X.

3. Montrer que X admet une espérance.

4. Montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ et calculer $E(X)$.

<u>Ex 73</u> : [Navale 2021] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1;1\}$ et suivant la même loi. Soit T une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1. On suppose $T, X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes.

1. Montrer que $V = \prod_{i=1}^{T} X_i$ admet un moment à tout ordre.

2. Calculer l'espérance et la variance de V.

<u>Ex 74</u> : [IMT 2019] Soit une expérience de Bernoulli de succès S de probabilité p, et d'échec E de probabilité q. On note X_1 la longueur de la première série et X_2 la longueur de la seconde. On attribue à la variable X_1 la valeur $+\infty$ si la série est ininterrompue et à la variable X_2 la valeur 0 s'il n'y a qu'une seule série et $+\infty$ si la deuxième série est ininterrompue.
Exemples : $SSSEESEEES ... X_1 = 3, X_2 = 2; ESSSSEES ... X_1 = 1, X_2 = 4$.

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Déterminer la loi conjointe de X_1 et X_2 et en déduire la loi de X_2.

3. Quelle est la loi de X_1 sachant $X_2 = k$?

4. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

5. Déterminer $cov(X_1, X_2)$.

<u>Ex 75</u> : [CCINP 2021] Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = |X - Y|$.

1. Calculer $P(Z = 0)$.

2. Calculer $P(Z = n)$ pour tout entier naturel non nul n.

3. Calculer l'espérance de Z.

<u>Ex 76</u> : [IMT 2019] On considère $S(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.

2. Calculer S sur $]-R, R[$.

On se donne une variable aléatoire X telle que, $\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut λ?

4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

<u>Ex 77</u> : [CCINP 2019] Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, suivent une loi de Bernoulli de même paramètre p.

1. Déterminer la loi suivie par $Y_n = X_n X_{n+1}$ et en déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

2. Déterminer $cov(Y_i, Y_j)$ pour $i \neq j$; les Y_n sont-elles mutuellement indépendantes ?

3. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

4. On pose $Z_n = \frac{1}{n} S_n$; montrer que $\forall a > 0, \lim_{n \to +\infty} P(|Z_n - p^2| \geq a) = 0$.

Séance du 17/06 : Espaces vectoriels normé, suites, fonctions usuelles, dérivation

---

Ex 78 : [CCINP 2021] Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$ et $V_n \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. ***a.*** Soit $a \in E$, montrer que : $\dfrac{1}{n+1}\|u^{n+1}(a) - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Exprimer $V_n \circ (u - \mathrm{Id}_E)$ en fonction de u^{n+1}.

c. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

2. Si E est de dimension finie, montrer que : $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = E$.

3. Dans le cas général, on suppose $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ supplémentaires ; soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$.
Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs $V_n(x)$.

Ex 79 : [IMT 1 2021] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et étudier la nature de $\sum (u_n - \ell)$.

Ex 80 : [IMT 1 2021] Soit $E = \mathbb{C}[X]$, $P = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in E$. On définit la norme $\|.\|$ par :

$\forall P \in E, \|P\| = \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. Soit $b \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(b) \end{array}\right.$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Étudier la continuité de f.

Ex 81 : [IMT 1 2021] Soit E un espace vectoriel normé, F un fermé de E, G un compact de E. Montrer que $F + G$ est un fermé de E.

Ex 82 : [IMT 2 2021] Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{M^p}{p!}$ converge et déterminer sa limite.

2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(\mathrm{e}^M) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(M)}$.

Ex 83 : [IMT 1 2021] Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on pose $P_n = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, P_n admet une unique racine sur $[0, 1]$, notée x_n.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et déterminer sa limite.

3. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \sim \dfrac{\alpha}{n}$.

Ex 84 : [IMT 2019]

1. Montrer que $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$ et $\|f\|_2 = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt$ sont deux normes sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

2. Sont-elles équivalentes ? Donner les inégalités qui les lient.