CCP MP 2021

Ex 1 : Résoudre le système
$$\begin{cases} a^2x + a^3y + az &= m \\ a^2x + y + az &= m \\ x + ay + a^2z &= m \end{cases}.$$

Ex 2 : $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.

2. On suppose $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0, u^{n-1} \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}_0$ telle que $M_{\mathcal{B}_0}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inconnue.

Ex 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$, on considère f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est un projecteur, la condition « f est de rang 1 » est-elle suffisante ? Nécessaire ?

2. On suppose f de rang 1 et de trace 1, montrer que f est un projecteur.

3. Construire une base de $\mathcal{L}(E)$ de projecteurs.

Ex 4 : Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im}(f)$

2. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f^2 + id_E)$.

3. Montrer que f n'est pas injective.

4. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = 2$.

5. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 5 : Soient $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

2. On pose $B = 2A - tr(A)I_n$. Calculer $\det(B)$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible. Dans ce cas, déterminer B^{-1}.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Ex 6 : On définit : $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & -X + \mathrm{tr}(X)\mathrm{I}_n \end{array} \right.$.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Déterminer ses sous-espaces propres.

Ex 7 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1. Soit p un projecteur de E. Exprimer $\det(\mathrm{id}_E + \lambda p)$ en fonction de $\mathrm{rg}(p)$ et de λ.

   Soit $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On note $B = V{}^tV$.
2. Quel est le rang de B ?
3. B est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés.
4. On pose $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} a_i a_j & \text{si } i \neq j \\ 1 + a_i^2 & \text{sinon.} \end{array} \right.$

   Déterminer $\det M$.

Ex 8 : Soit la matrice M_n telle que pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, on a : $m_{i,j} = i$ si $i = j$, 1 sinon. On note P_n son polynôme caractéristique.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $P_{n+1} = (X-n)P_n - X(X-1)...(X-(n-1))$. On pourra effectuer les opérations $L_j \leftarrow L_j - L_{j-1}$, pour $j \geq 2$.
2. Par récurrence sur n, montrer que $\forall n \geq 2$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $(-1)^{n-k} P_n(k) > 0$.
3. Montrer que M_n admet exactement une valeur propre dans chaque intervalle $]1,2[$, $]2,3[$, ..., $]n-1, +\infty[$.

Ex 9 : [Incomplet] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

avec $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$.

1. On suppose dans cette question que $a = b = c = d = e = 0$. Déterminer χ_u et π_u (le polynôme minimal de u).
2. Soit $k \in [\![1,5]\!]$. Calculer $u^k(e_1)$.
3. Soit P un polynôme unitaire tel que $P(u)(e_1) = 0$.
   - **a.** Montrer que $\deg(P) \geq 5$.
   - **b.** Déterminer un polynôme P tel que $\deg(P) = 5$ et $P(u)(e_1) = 0$.
   - **c.** Déterminer π_u.
   - **d.** Déterminer χ_u par deux méthodes différentes.

4. On pose $a = c = e = 0$, $b = -2$ et $d = 4$. u est-il diagonalisable ?

Ex 10 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Soit f et g deux endomorphismes de E admettant chacun n valeurs propres distinctes. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors leurs vecteurs propres sont identiques.

2. *a.* Trouver une matrice A telle que $A^2 = M$.

b. Trouver toutes les matrices A telles que $A^2 = M$.

Ex 11 : On note f l'endomrophisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto M + 2M^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Calculer $tr(f)$ et $\det(f)$.

Ex 12 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *a.* Si $u^2 = 0$, montrer que $\text{rg}(u) \leq \dfrac{n}{2}$.

b. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq \dfrac{n}{2}$. Donner un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = r$.

2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent.

a. Montrer que si u admet n valeurs propres distinctes, alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

b. Montrer que si u et v sont diagonalisables, alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

Ex 13 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ soit libre.
Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Ex 14 : On donne deux complexes distincts non nuls λ, μ et deux matrices complexes carrées de taille p, telles que $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse (on pourra calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$).

2. Exprimer A en fonction de M et I_p.

3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteur.

4. M est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

Ex 15 : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

1. Énoncer le lemme des noyaux.

2. On suppose que $\det(f^2) \neq 0$ et que f^2 est diagonalisable.
Trouver un polynôme annulateur de f et montrer que f est diagonalisable.

3. On suppose que $\det(f^2) = 0$ et que f^2 est diagonalisable.
On suppose de plus que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$. Montrer que f est diagonalisable.

Ex 16 :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $Sp(M) = Sp(M^T)$.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

3. Montrer que A n'est pas inversible si et seulement si $1 \in Sp(A)$.

4. Soit $P = X^4 - 2X^2 + X$. Montrer que P annule A.

5. A est elle diagonalisable ?

6. Quelles remarques faire sur le polynôme minimal ? (Sous entendu trouver toutes les possibilités pour le polynôme minimal).

Ex 17 :

1. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique.

2. M est-elle diagonalisable ?

3. Calculer $(M - I_3)^3$ et en déduire le calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que $\left(\dfrac{1}{n^2}M^n\right)$ converge. On note A sa limite.

5. On définit la suite (X_n) par $X_n = M^n \cdot X_0$. On notera $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

  a. Montrer que si $X_0 \neq 0$, alors $X_n \neq 0$ pour tout n.

  b. Montrer que si $x_0 - y_0 + 3z_0 \neq 0$, alors la série de terme général $\dfrac{n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$ diverge.

Ex 18 : Soit b un réel et $n > 1$. On considère la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & b \end{pmatrix}$

On appelle J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. A et J sont-elles diagonalisables ?

2. Calculer les éléments propres de J (valeurs propres et vecteurs propres).

3. Calculer $\det A$.

Ex 19 : Soit b un réel et $n > 1$. On considère la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & b \end{pmatrix}$

On appelle J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Exprimer A comme combinaison linéaire de J et I_n.

2. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à A.

4. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable, puis la diagonaliser.
5. Calculer $\det A$.

Ex 20 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que : $\forall P \in E,\ \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$.

Ex 21 : [Incomplet] Soit m un entier supérieur ou égal à 3. On définit le produit scalaire suivant : soient $X, Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ \langle X, Y\rangle = X^TY$.
Soit n un entier supérieur ou égal à -1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est dite de type n lorsque $A^T = A^n$.

1. Comment appelle-t-on une matrice de type 1 ? Donner un exemple de matrice de type -1. Pour la suite, on prendra $n > 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $N(x)$ suivante : $N(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$
   a. Montrer que pour tout $k > 0,\ N(x)^k = N(kx)$.
   b. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $N(x)$ est une matrice de type n.

   Pour la suite, on prendra $m = 3$.
   Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ une matrice de type n. Soit $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tel que $B = A^{n+1}$.
3. Montrer que $A^{n^2} = A$.
4. Montrer que $B^n = B$ puis que B est symétrique. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
5. Montrer que -1 ne peut pas être valeur propre.

Ex 22 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une application ϕ par :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \phi(M, N) = \operatorname{tr}(M^\top N)$$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
2. Pour $(M, N) \in O_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\phi(M, N) \leq n$.
3. Pour $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\operatorname{tr}((AB)^2) \leq \operatorname{tr}(A^2B^2)$
4. Pour $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\operatorname{tr}((AB + BA)^2) \leq 4\operatorname{tr}(A^2B^2)$.

Ex 23 : Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soient $x, y \in E$ et si $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$, on rappelle que $(x|y) = X^TY$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M^T = Mat_{\mathcal{B}}(v)$.
On suppose que u et v commutent.

1. a. Montrer que : $\forall x, y \in E,\ (u(x)|y) = (x|v(y))$.
   b. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = (\operatorname{Im}(v))^\perp$.

c. Établir que : $E = \operatorname{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(v)$.

d. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(vu) = \operatorname{Ker}(v)$ et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(v)$.

2. Montrer que u et v ont le même spectre et les mêmes sous-espaces propres.

3. Montrer que u est un endomorphisme symétrique si et seulement s'il est diagonalisable.

Ex 24 : Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit $\alpha = \min(\mathrm{Sp}(u))$, $\beta = \max(\mathrm{Sp}(u))$. Montrer que $\forall x \in E,\ \alpha\|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \beta\|x\|^2$.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \iff \forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$, puis que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in E\backslash\{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$.

3. On suppose que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall x \in E,\ u(x) = 0 \iff \langle u(x), x\rangle = 0$.

4. Soit v un autre endomorphisme symétrique de E. On suppose $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $\mathrm{Sp}(u+v) \subset \mathbb{R}_+$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

c. Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Ex 25 : Soient $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$. Un tel endomorphisme est dit antisymétrique.

1. Montrer que : $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle = 0$ et $\left\langle f^2(x), x\right\rangle \leq 0$.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Que peut-on dire de $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$?

3. En calculant $\det(A^T)$, montrer que si f est bijective, alors la dimension de E est paire.

4. Montrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_-$.

Ex 26 : Soit E un espace euclidien et $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.
On dit que v est positif lorsque : $\forall x \in E,\ \langle x|v(x)\rangle \geqslant 0$.
On dit que v est défini positif lorsque v est positif et : $\langle x|v(x)\rangle = 0 \implies x = 0_E$.

1. *a.* Montrer que v est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.

b. Montrer que v est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $(u_1, ..., u_n)$ une base de E. On définit : $\forall x \in E,\ f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x|u_i\rangle u_i$.

a. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, que f est symétrique, défini positif.

b. Montrer qu'il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique défini positif tel que $g^2 = f^{-1}$.

c. Démontrer que $(g(u_1), ..., g(u_n))$ est une base orthonormée de E.

Ex 27 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{R}$ et $a \in E$ un vecteur unitaire. On définit un endomorphisme u_k de E par :
$\forall x \in E,\ u_k(x) = x + k\langle x|a\rangle a$.

1. Calculer $u_k(a)$ et montrer que u_k est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. L'endomorphisme u_k est-il symétrique ? Préciser son spectre.

3. Trouver les valeurs de k telles que u_k est un automorphisme. dans ce cas, expliciter u_k^{-1}.

Ex 28 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n, u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit p un entier naturel impair.

a. Montrer l'existence d'un endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$ (On pensera à la matrice représentative de u).

b. Montrer que v possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres disctinctes que u.

c. Montrer que v est l'unique endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$.

2. Soit p un entier naturel pair et non nul.

a. A-t-on les mêmes résultats ?

b. Que peut-on dire si u est positif ? (c'est-à-dire $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$)

c. Que peut-on dire si u et v sont positifs ?

Ex 29 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$. On pourra considérer la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.

3. On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'intégrale.

4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Ex 30 : Soit (a_n) une suite de réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \frac{a_n}{1 + a_n} \text{ et } c_n = \frac{1}{1 + n^2 a_n}$$

1. *a.* Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b. Montrer que pour n suffisamment grand, $a_n \leq 2b_n$.

2. *a.* Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

b. Trouver des exemples pour lesquels $\sum c_n$ diverge et $\sum a_n$ converge ou diverge.

3. On admet que la fonction $f \colon x \mapsto x + \dfrac{1}{1 + n^2 x}$ admet un minimum sur $[0, +\infty[$ en $\dfrac{n-1}{n^2}$.

a. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum c_n$ diverge.

b. Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum c_n$ converge ou bien diverge.

Ex 31 : On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$a_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n) \quad , \quad b_n = \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$.

1. Montrer que $\sum b_n$ converge.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel pair.

3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
$\sum b_n x^n \quad , \quad \sum a_n b_n x^n \quad , \quad \sum (a_n + b_n) x^n$.

Ex 32 : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

2. Étudier la monotonie de S.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ S(x+1)+S(x) = \frac{1}{x}$. En déduire un équivalent de S au voisinage de 0.

Ex 33 : Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum f_n$.

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

4. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t$?

6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ex 34 : On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(x\ln(x))^n}{n!} \end{array} \right.$.

1. Montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\sum f_n$ et calculer la somme.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0;1]$ et déterminer son intégrale.

3. Démontrer l'intégrabilité de $x \mapsto x^x$ sur $]0;1]$ et exprimer son intégrale sous forme de somme.

Ex 35 : Étudier la convergence simple, normale et uniforme sur l'intervalle $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ avec $f_n : x \mapsto nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

Ex 36 :

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

On note, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? Converge-t-elle uniformément ?

3. Montrer que sa somme est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite en $+\infty$.

4. Résoudre $y' - y = -\frac{e^x}{e^x+1}$ sur $]0,+\infty[$.

5. En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Ex 37 :

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx$ est bien définie.

2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.

3. Écrire I sous la forme d'une série.

4. Donner la valeur exacte de I en sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 38 : Soit : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (\ln x)^q \, \mathrm{d}x$.

1. **a.** Montrer que $I_{p,q}$ converge.

b. Calculer $I_{p,q}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}$.

Ex 39 : À l'aide de séries entières, calculer les sommes

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser la première question).

Ex 40 :

1. Calculer le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n (2n)!}{(2n+1)!} x^n$. En déduire celui de $\displaystyle\sum \frac{4^n (2n)!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

On note $S(x)$ la somme de cette série.

2. S est-elle dérivable sur son intervalle ouvert de convergence ? Calculer explicitement $S'(x)$ et en déduire $S(x)$.

Ex 41 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $f(0)$ existe.

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On admet que f est continue en 0.

3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

4. Déterminer f sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. En déduire la caleur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Ex 42 : On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$

1. a. Montrer que f est définie et continue sur $[0;+\infty[$.

   b. Montrer que f est C^1 sur $]0;+\infty[$.

2. a. Montrer que f est solution de (E) : $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$

   b. Déterminer la fonction f. *Rappel* : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Ex 43 : Soit F la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\, dt$.

1. Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer F'. On donne $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Exprimer F.

Ex 44 : On considère $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle .,. \rangle$, produit scalaire quelconque. Soit f un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout $h \neq 0$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, $\langle f(h), h \rangle > 0$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$.

   a. Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle.

   b. À l'aide des questions précédentes, montrer que g admet un point critique unique z_0 tel que $z_0 = f^{-1}(u)$.

   c. Montrer que g admet en z_0 un minimum global.

Ex 45 :

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y_m = \min(X, m)$, avec X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

   a. Déterminer G_X, la série génératrice de X.

   b. En déduire $E(X)$ et $V(X)$ grâce à la question précédente.

   c. Déterminer la loi de Y_m et son espérance.

2. Montrer qu'une variable aléatoire X est sans mémoire
   $(\forall k, n \in \mathbb{N},\ P(X > n+k | X > n) = P(X > k))$ si et seulement si X suit une loi géométrique.

Ex 46 :
Pour tout n :

- Soit p_n appartenant à $]0,1[$,
- soit X_n (respectivement Y_n) une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli (respectivement géométrique) de paramètre p_n,
- on suppose X_n et Y_n indépendantes.

On pose $U_n = X_n - Y_n$

1. Calculer l'espérance et la variance de U_n.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(V(U_n))_n$ converge vers 0.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, $\lim P\{|U_n - 1| > a\} = 0$.

Ex 47 : [Incomplet] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappelez l'espérance et la variance de X.

2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

3. Calculer $P(X = Y)$.

4. Montrer que $P(X < Y) = P(Y < X)$.

5. Calculer $P(X \geqslant Y)$.

Ex 48 : On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire ces jetons avec remise et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage pour lequel on obtient pour la première fois un jeton différent du premier tiré. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « le jeton k est tiré au premier tirage ».

1. Montrer que $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

2. Déterminer la loi de X.

3. Que peut-on dire de la loi de $Y = X - 1$?

4. Déterminer espérance et variance de X.

Ex 49 : Soient X, Y, Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

2. Déterminer la loi de $X + Y$.

3. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

Ex 50 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi donnée par :
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, où p est dans $]0, 1[$. On pose $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$.

TPE/CCE/ENSEA/IMT/Navale/BECEAS/St Cyr MP 2021

Ex 51 : [IMT 2]
Soit f un endomorphisme de E dans E tel que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$. Que dire de f ? Donner une interprétation géométrique.

2. On suppose désormais E de dimension finie n. Donner une représentation matricielle de f.

3. Donner un exemple de f tel que $f \circ f \neq f$ mais $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.

Ex 52 : [IMT] Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g$ soit bijective. Montrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = n$.

Ex 53 : [Navale] Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{rg} B = 1$.
Montrer l'inégalité : $\det((A+B)(A-B)) \leqslant \det(A^2)$.

Ex 54 : [IMT 1] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S} = \{PMP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que $\mathcal{S} = \{\lambda_0 \mathrm{I}_n\}$ pour $\lambda_0 \neq 0$ si et seulement si tout élément de $\mathcal{S}$ a tous ses éléments diagonaux non nuls.

Ex 55 : [IMT] On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
A et B sont-elles semblables ?

Ex 56 : [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A, et la diagonaliser si possible.
2. Résoudre l'équation $M^2 = A$ pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ex 57 : [IMT 2] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres réelles de u deux à deux distinctes.

1. Donner une condition sur P pour que u soit diagonalisable et le démontrer.
2. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ peut-il être annulé par $(X-1)(X^2+1)$ et de trace égale à 0.
3. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ peut-il être annulé par $(X-1)(X^2+1)$ et de trace égale à 3 ?

Ex 58 : [Navale] Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X(X-1)P' - nXP \end{array} \right.$.

1. Montrer que : $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer le spectre de ϕ. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Ex 59 : [Navale] Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence :
A et B ont une valeur propre commune si et seulement si il existe $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \backslash \{0\}$ telle que $AX = XB$.
Y-a-t-il unicité de la matrice X ?

Ex 60 : [IMT] Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ composée de 1 sur la première ligne, la première colonne et la diagonale, les autres coefficients étant nuls : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que 1 est valeur propre et déterminer l'espace propre associé.
2. En déduire les autres espaces propres.

Ex 61 : [IMT] Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0\}$ si et seulement si A est nilpotente.

2. On suppose $\mathrm{Tr}\, A^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente.

Ex 62 : [IMT 2]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner la définition d'une valeur propre de A et du polynôme caractéristique de A. Quel est le lien entre ces deux notions ? A admet-elle toujours une valeur propre ?
2. Soit λ une valeur propre de A. Soit P un polynôme annulateur de A. Que peut-on dire de $P(\lambda)$? Justifier.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0_n$. Que peut-on dire des valeurs propres réelles de A ? Et des valeurs propres complexes ?

Ex 63 : [IMT 1] Soit l'endomorphisme $u : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{Tr}(M) \cdot I_n \end{array}$ Déterminer les valeurs propres de u, ainsi que les espaces propres associés.

Ex 64 : [IMT 2] On note $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) /\ f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$ on définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}\, dt$.

1. Montrer que $T(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de T.

Ex 65 : [ENSEA] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver les éléments propres de A. On note P la matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D$, avec D diagonale.
2. On note (E) l'équation $M^2 = A, M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si M est solution, alors M et A commutent puis en déduire que $C = P^{-1}MP$ est diagonale.
3. Résoudre (E).

Ex 66 : [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
2. Diagonaliser A dans une base orthonormée.

Ex 67 : [IMT] On définit une matrice réelle de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Montrer que si $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $c_k b_k > 0$, alors A est diagonalisable.

On montrera qu'il existe une matrice D diagonale et inversible D telle que $D^{-1}AD$ soit symétrique.

Ex 68 : [IMT 1] Soit E un espace euclidien. On pose $A(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall (x,y) \in E^2, \ (f(x)|y) = -(x|f(y))\}$.

1. Soit $f \in A(E)$. Soit B_E une base orthonormée de E. Que peut-on dire de la matrice de f dans B_E ?
2. On suppose ici que $\dim(E) = 2$.
   Soit $C(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de $A(E)$. Montrer que $C(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant $A(E)$.

Ex 69 : [IMT 2] Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(]0,1], \mathbb{R}) \ / \ t \mapsto t^2 f(t) \text{ est intégrable sur }]0,1]\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t) g(t) \,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

Ex 70 : [IMT 1] Démontrer l'existence de $m = \min\left(\left\{\displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}\right)$. Déterminer tous les couples (a,b) où le minimum est atteint.

Ex 71 : [IMT 1] Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction suivante : $\forall (f,g) \in E^2 : \quad < f, g >= \displaystyle\int_{-1}^1 f(t) g(t) \, dt$

1. Montrer que cette fonction est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{f \in E : \forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0\}$. Calculer $F^\perp$.
3. Que vaut $F + F^\perp$.

Ex 72 : [IMT 1] $S \in S_n(\mathbf{R})$, dont toutes ses valeurs propres strictement positives.
Soit $Y_k = \dfrac{S^k X}{\|S^k X\|}$.
Montrer que Y_k converge vers un vecteur propre.

Ex 73 : [IMT 2] Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n + 1 + \sin n}$ converge.

1. À l'aide d'un développement limité.
2. En caractérisant $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{(-1)^n}{n + 1 + \sin n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
3. En montrant que le critère spécial des séries alternées s'applique.

Ex 74 : [IMT 1]

1. Soit $a > 0$, on définit une suite récurrente (x_n) par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$. Etudier la suite (x_n).
2. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives). Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

3. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On définit une suite récurrente (A_n) par $A_0 = A$ et $A_{n+1} = \dfrac{1}{2}(A_n + A.A_n^{-1})$. Montrer que (A_n) converge vers B.

Ex 75 : [BECEAS] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $g : z \in \mathbb{C} \longmapsto |P(z)|$.

1. Montrer que $\min\limits_{\mathbb{C}} g$ existe et vaut 0 (sans utiliser le théorème de D'Alembert-Gauss).
2. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{C}[X]$.

Ex 76 : [IMT] Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note (E_m) l'équation $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{m}$

1. Montrer qu'il existe des suites (u_m) et (v_m) telles que u_m et v_m vérifient (E_m) et pour m assez grand $0 < u_m < e < v_m$.
2. La suite (u_m) converge-t-elle. On note ℓ sa limite
3. Trouver un équivalent de $u_m - \ell$.

Ex 77 : [IMT 1] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. Déterminer en fonction de a, b, c, la nature de $\sum u_n$ et calculer cette somme lorsqu'elle converge.

Ex 78 : [IMT 1]

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S.
2. Proposer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que S est irrationnel.

Ex 79 : [IMT 1] Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$.

Ex 80 : [BECEAS] Soient f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P un polynôme de degré impair tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$.

1. Montrer que : $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a) = 0$.
2. En déduire que f est identiquement nulle.
3. Ce résultat reste-t-il vrai si P est de degré pair ? Si oui, on donnera une démonstration, sinon un contre-exemple.

Ex 81 : [Navale] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,dt$ converge pour un certain $a > 0$.

1. On suppose $f \geq 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ converge pour tout $x > a$.
2. Montrer ce résultat pour f de signe quelconque.

Ex 82 : [Navale] Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin xt\,\mathrm{d}t > 0$.

Ex 83 : [IMT] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t \ln t)^n \, \mathrm{d}t$. Montrer que cette intégrale converge. Donner sa valeur.

Ex 84 : [IMT 1] Soit $F : x \mapsto x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$. Déterminer les limites de F en 0^+ et $+\infty$.

Ex 85 : [IMT] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \cos^n(x)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier la parité et la périodicité de f.

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$. Exprimer f'.

4. En déduire une expression de f.

Ex 86 : [IMT 1] Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Ex 87 : [IMT]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le DSE sur $]-1, 1[$ de $g(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{(x \sin(a)}{(1 - x \cos(a))}$.

Ex 88 : [Navale] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $c_n \to A$ quand $n \to +\infty$.

1. Trouver le rayon de convergence de $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ et $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} t^n$.

2. Montrer que $f' = g' - g$ et que $\forall t \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^t f(u) \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u = (g(t) - f(t)) \mathrm{e}^{-t}$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty f(u) \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u = A$

Ex 89 : [IMT 1] Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série suivante : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2 + 4n - 1}{(n+2)n!} x^n$.

Ex 90 : [IMT 2] Soit G la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(t^2+1))}{t^2+1} dt$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \exp(-u^2) du$.

1. Montrer que G est de classe C^1.

2. Exprimer $G'(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F'(x)$.

3. Déduire $F(x)$.

Ex 91 : [BECEAS] Soit $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Montrer que f est convexe.
3. Montrer que f est convexe à l'aide d'une caractérisation faisant intervenir f'' (on n'oubliera pas de vérifier que f'' existe bien).

Ex 92 : [IMT 1]
Soit $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de C et S.
2. Soit $U = C + iS$. Déterminer un équation différentielle vérifiée par U.
3. En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$, déterminer C et S.

Ex 93 : [IMT 2] Soit $(E) : xy' + y = 0$.

1. Trouver une solution de (E) développable en série entière.
2. Il y a-t-il d'autres solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $(E') : \begin{cases} xy'(x) + y(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Résoudre (E') sur un intervalle I et donner le plus grand intervalle possible pour I.
   Qu'aurait-on pu conclure sans calcul grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz ?
5. Tracer l'allure de la fonction y développable en série entière en 0.

Ex 94 : [IMT] Trouver une solution à l'équation différentielle $xy'' - y' + x^3y = 0$ sous forme de somme d'une série entière.

Ex 95 : [IMT 1] Soient $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}^*$.
On dispose de n urnes dans lesquelles sont réparties na boules de manière aléatoire et indépendante.
On définit Y_n le nombre d'urnes vides, et $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.
2. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Ex 96 : [IMT] On considère $X_i, i \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire
$T_r = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1 + \cdots + X_n = r\} \bigcup \{+\infty\})$

1. Pour $r = 1$, reconnaître la loi de T_r.
2. Calculer $P(T_r = n)$.
3. Montrer que l'évènement $(T_r = +\infty)$ est négligeable.

Ex 97 : [IMT 1] Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivants une loi binomiale paramètres n, p.

On pose $M = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}$

1. À l'aide des fonctions génératrices, montrer que $S = X + Y + Z$ suit une loi binomiale puis donner l'espérance et la variance de S.
2. Trouver une expression de M^2 en fonction de M et S.
3. Déterminer la probabilité que M soit un projecteur.

Ex 98 : [IMT 2] Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

- si on obtient pile : on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce,
- si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Ex 99 : [ENSEA]

1. Soit $a > 0$, $Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = Y_1 + ... + Y_n$. Montrer que $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)| \geq a) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
2. On dispose d'urne urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires, on effectue un tirage avec remise. Au bout de combien de temps peut-on espérer avoir 95% de chance de tomber sur une boule rouge avec une probabilité comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Ex 100 : [Navale] Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé.

1. Soit $\lambda > 0$, N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que si g est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors $E(Ng(N)) = \lambda E(g(N+1))$.
2. Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et telle que $E(Tg(T)) = \lambda E(g(T+1))$ pour toute fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $E(g(T+1)) < +\infty$. Montrer que T suit une loi de Poisson.