Séance du 15/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [CCINP 2022] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme pour lequel le noyau et l'image ne sont pas supplémentaires.
2. Montrer que si f est diagonalisable, alors $\text{Im}\,(f)$ et $\text{Ker}\,(f)$ sont supplémentaires. Que dire de la réciproque ?
3. (a) Montrer que la suite $(\dim \text{Ker}\,(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k > k_0,\ \text{Ker}\,(f^k) = \text{Ker}\,(f^{k_0})$.
   (c) Montrer que $\text{Ker}\,(f^{k_0})$ et $\text{Im}\,(f^{k_0})$ sont supplémentaires dans E.

Ex 2 : [CCINP 2022] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit p un projecteur (p linéaire et $p^2 = p$). Montrer que $\text{Ker}\, p \oplus \text{Im}\, p = E$ et que p est la projection sur $\text{Im}\, p$ de direction $\text{Ker}\, p$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \text{GL}(E)$ si et seulement si $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$.

Ex 3 : [CCINP 2022] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 = -\text{Id}_E$.

1. Montrer que f n'admet pas de valeur propre réelle et montrer que f est bijectif.
2. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Soit u un vecteur non nul. Montrer que $\text{Vect}(u, f(u))$ est stable par f.
4. On prend $n = 4$. Montrer l'existence de deux vecteurs u, v tels que $(u, f(u), v, f(v))$ soit une base de E.
5. Généraliser ce résultat.

Ex 4 : [CCINP 2022] On note E l'ensemble $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et on définit l'application u telle que pour tout $f \in E$, $u(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ si $x > 0$ et $u(f)(0) = f(0)$.

1. (a) Montrer que pour tout $f \in E$, $u(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$
   (b) Pour tout $f \in E$, déterminer $u(f)'$
2. (a) Montrer que $u \in L(E)$
   (b) Montrer que u est injective
   (c) u est-elle surjective ?
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de u

Ex 5 : [IMT 2 2022] Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit F l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont X est un vecteur propre. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; quelle est sa dimension ?
2. Même question avec X quelconque.

Ex 6 : [ENSEA 2022] Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme n'ayant que $\mathbb{E}$ et $\{0\}$ pour seuls espaces stables.

1. Montrer que u ne possède pas de valeur propre.
2. En déduire $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{E}$.
4. Comment est la matrice de u dans cette base ?

Ex 7 : [CCINP 2019] Soit p et q deux projecteurs de E où E est un espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Séance du 16/05 : Intégration

<u>Ex 8</u> : [CCINP 2022]

1. Donner le développement en série de Taylor de l'exponentielle sur $[0;1]$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$. Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et qu'elle est de limite nulle.
3. Donner un équivalent de I_n en partant d'une intégration par parties
4. (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ en fonction de I_n

   (b) Montrer la convergence de la suite $u_n = n\sin(2\pi n!e)$

<u>Ex 9</u> : [CCINP 2022] Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifiez l'existence de ces intégrales
2. Montrer que I_n est constante. On pourra calculer $I_{n+1} - I_n$.
3. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

<u>Ex 10</u> : [CCINP 2022] Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I existe.
2. On considère : $\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t|\sin t|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (u+k\pi)\frac{\sin u}{(u+k\pi)^2+1}du.$
3. I est-elle absolument convergente ?

<u>Ex 11</u> : [CCINP 2022] Soit $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}du$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2u^2}du$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(t) = -\sqrt{\pi}e^{-it^2}$.
   En déduire que F est dérivable en 0 et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
5. Montrer que $F(0) = \sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it^2}dt$.
6. En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.

Ex 12 : [CCINP 2022] On définit pour tout $t > 0$, $f(t) = \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$, puis sur $[1, +\infty[$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ex 13 : [IMT 2 2022]

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $u_x : t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On posera $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_x$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{x}{4+x^2} - \dfrac{x}{1+x^2}$.
4. Montrer l'existence de $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt$. En déduire $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \int_a^{2a} \frac{e^{-t}}{t}dt$.
5. Calculer $f(x)$.

Ex 14 : [IMT 2 2019]

1. Si f est continue sur $[a, b]$, que représente $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$?

   Illustrer graphiquement et énoncer le théorème relatif à $S_n(f)$.
2. Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}$.

Séance du 17/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [IMT 1 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*,\ a_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_1, ..., a_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n-1},\ P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

1. Montrer que dans $\mathbb{R}_+^*$, P admet un unique zéro, noté ρ.
2. Montrer que tout zéro de P est de module inférieur ou égal à ρ.
3. Montrer que : $\rho \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)$.
4. Montrer que : $\rho < 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k$.

Ex 16 : [IMT 1 2022]

1. Le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
2. Le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?
3. Soient des entiers p, q supérieurs ou égaux à 2 tels que $p \wedge q = 1$. Montrer que $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Ex 17 : [IMT 1 2022] Quels sont les polynômes complexes P tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ (en notant $\mathbb{U}$ le cercle unité) ?

Ex 18 : [IMT 1 2022] Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est premier si et seulement si :
$\forall (x, y) \in A^2, xy \in I \implies x \in I$ ou $y \in I$.
Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers, montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

Ex 19 : [IMT 2 2022] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1. Déterminer f sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}_+$.
3. Étudier la monotonie de f.
4. Déterminer entièrement f.

Ex 20 : [CCINP 2022] On note E l'espace des polynômes réels de degré au plus n. Soient F, G deux polynômes de degrés $n+1$. On considère f l'application de E dans E qui à P associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-il un automorphisme ? (Discuter selon que P et G sont premiers entre eux ou pas)
3. Supposons que $F \wedge G = 1$ et que G soit scindé à racines simples. Quels sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est diagonalisable ?

<u>Ex 21</u> : [IMT 2 2019]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge 10 = 1$. Montrer que : $n^4 \equiv 1 \ \ [10]$.
2. On suppose $a \wedge 10 = 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que : $a^{4.10^k} \equiv 1 \ \ [10^{k+1}]$.

Séance du 23/05 : Probabilité, dénombrement

<u>Ex 22</u> : [IMT 1 2022] On pose $f : z \in \mathbb{U}_n \to z^2 \in \mathbb{U}_n$ où $\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est-elle bijective ?
2. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ $f \circ f = Id$?

<u>Ex 23</u> : [IMT 1 2022] Soit n un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$.
Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement $D_p = \{1 \leqslant k \leqslant n,\ p \text{ divise } k\}$.

1. Calculer $P(D_p)$.
2. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times ... \times p_r^{\alpha_r}$ la décompisiton de $n$en facteurs premiers. Les événements $D_{p_1}, \dots, D_{p_r}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'indicatrice d'Euler (le nombre d'eléments de Ω premiers avec n). Montrer que $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

<u>Ex 24</u> : [IMT 1 2022] Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $T_r = \min\left(\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1 + \cdots + X_n = r\} \cup \{+\infty\}\right)$.

1. Reconnaître la loi de T_1.
2. Calculer $P(T_r = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que l'événement $(T_r = +\infty)$ est négligeable.

<u>Ex 25</u> : [IMT 1 2022] On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules en même temps dans l'urne. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la plus petite boule tirée.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$.
3. Calculer l'espérance de X.

<u>Ex 26</u> : [IMT 2 2022] Un mobile se déplace sur l'axe des abscisses ; il avance de 1 avec la probabilité p et recule de 1 avec probabilité $q = 1 - p$. On note X_n une variable aléatoire donnant l'emplacement du mobile au temps n.

1. Déterminer $P(X_n = 0)$.
2. Exprimer la loi de X_n.
3. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Ex 27 : [Navale 2022] Chaque jour, il y a Y clients, avec $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, et chaque client a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être satisfait. Soit X le nombre de clients satisfaits.

1. Préciser la loi de Y, puis celle de X conditionnellement à l'événement $(Y = n)$.
2. Calculer la loi du couple (X, Y), puis celle de X.

Ex 28 : [TPE 2019] Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise et si on tire une boule rouge, on la remet avec deux autres boules rouges. Soit l'événement A_n : "Lors des n premiers tirages, on a eu des boules rouges". On convient $P(A_0) = 1$.

1. Déterminer $P_{A_{n-1}}(A_n) = P(A_n|A_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la valeur de $P(A_n)$.
3. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

Séance du 25/05 : Matrices et déterminant

Ex 29 : [CCINP 2022] Calculer les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. En déduire le déterminant de $u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{cases}$

Ex 30 : [CCINP 2022] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer que dans une certain base $\mathcal{B}$ de E, on a $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 31 : [CCINP 2022] Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Cas $n = 2$: Calculer les éléments propres de A.
3. Cas $n \neq 2$:
   (a) Montrer que 1 est une valeur propre de A.
   (b) Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que 1, alors $(\lambda - 1)^2 = n - 1$. Expliciter les éléments propres de A.
   (c) Calculer le déterminant de A en fonction de n.

Ex 32 : [CCINP 2022] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$.
2. Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, montrer que : $\mathrm{rg}\,(M) = 4$.
   Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, montrer que : $\mathrm{rg}\,(M) = 2$.
3. On pose $w \in \mathbb{C}$ tel que : $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Ex 33 : [CCINP 2022] Une matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie $\|.\|_\infty$ standard sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
3. En déduire que pour toute valeur propre complexe λ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et stable par produit matriciel.

Ex 34 : [IMT 2 2022] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose A inversible et B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont nilpotentes.

Ex 35 : [Navale 2022] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{rg}(B) = 1$.
Montrer que $\det(A+B)\det(A-B) \leq (\det(A))^2$.

Séance du 31/05 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 36 : [CCINP 2022] Soient $\alpha > 0, u_1 > 0$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Jusitifier l'existence de $\ln(S_{n+1})$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et l'exprimer à l'aide de $\ln(S_n)$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1/2$.
4. Pour $\alpha \leq 1/2$, déterminer la limite de $(\ln(S_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$; conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.

Ex 37 : [CCINP 2022] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, \pi/2]$.
2. (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$? (on pourra considérer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n$).
3. Soient $0 < a < b$. (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, \pi/2]$? Et sur $[a, b] \subset [0, \pi/2]$?
4. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)dt = g(0)$.

Ex 38 : [CCINP 2022] Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de S ?
2. Montrer la continuité de S sur celui-ci (on pourra travailler sur un segment).
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
4. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt$, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$).
   (b) Donner un équivalent de S en 0.

Ex 39 : [IMT 2 2022] On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Donner la limite de f en $+\infty$.

Ex 40 : [IMT 2 2022] Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_{n-1}(1-t)dt$, avec $g_0 = 1$.

1. Montrer que la suite (g_n) est bien définie sur $[0,1]$.
2. Montrer que la suite (g_n) est bornée et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|g_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\|g_{n-1}\|_\infty$.
3. Montrer que la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. Identifier la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$.

Ex 41 : [IMT 2 2022] Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n(1-\sqrt{x})$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Ex 42 : [IMT 2 2022] Nature de $\sum \cos\left(n^2\pi\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)$.

Séance du 02/06 : Réduction

Ex 43 : [CCINP 2022] Soit $n \geq 2$. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$A = M(a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-2} & a_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & . & . & a_n & a_1 \end{pmatrix}$, avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$.

1. Déterminer les éléments propres de J
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(J)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soit $\mathcal{T} = \{M(a_1, ..., a_n),\ a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

Ex 44 : [CCINP 2022] Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose $A = UV^T$ et $a = tr(A)$.

1. Que vaut le rang de A ?
2. Calculer V^TU et A^2.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. On suppose $a \neq 0$. Déterminer les sous-espaces propres de A.

Ex 45 : [CCINP 2022]

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $ab > 0$ ou $a = b = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ pair et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer un espace de dimension deux stable par A. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, ..., a_n)$ pour que A soit diagonalisable.

Ex 46 : [CCINP 2022] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & (X-a)(X-b)P' - nXP \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Prouver que u est diagonalisable et trouver ses sous-espaces propres.

Ex 47 : [CCINP 2022] Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, et $tr(A) = 8$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Ex 48 : [IMT 2 2022] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Résoudre $M^2 = A$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ex 49 : [IMT 2 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on dire de son spectre ?
2. On suppose dans cette question que 0 n'est pas dans le spectre de A. Montrer que $A - I_n$ est inversible et que A est symétrique.
3. (BONUS) Montrer que : 0 et 1 ne sont pas dans $Sp(A)$ (considérer $X^T AX$, avec X bien choisi).
4. (BONUS) Expliciter la forme de A.

Séance du 06/06 : Séries entières, dérivation

Ex 50 : [CCINP 2022]

1. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \, x^n$.
   Pour quels x la quantité $f(x)$ est-elle définie ? On note I le domaine de définition de f.
2. Soit $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_1 = -1$ et : $\forall n \geqslant 2,\ a_n = -\ln(1 - \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$.
   Pour quels x la quantité $g(x)$ est-elle définie ? On note J le domaine de définition de g.
3. (a) Montrer que $g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x)$.
   (b) Montrer que $f(x) \sim -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x \to 1^-$.
   (c) Déterminer un équivalent de f en $(-1)^+$.

Ex 51 : [CCINP 2022] On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 4^n n!$.
2. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est définie sur un intervalle à préciser. Montrer que f est solution de $y' = y^2$.
3. Déterminer f.
4. En déduire explicitement l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 52 : [CCINP 2022] On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Il-y-a-t-il convergence uniforme sur D de la série de fonction de somme f ?
3. Déterminer la valeur de $f(x)$.

Ex 53 : [CCINP 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{i2^n x}}{n^n}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} \dfrac{2^{k^2}}{k!k^k} x^k$.
   (b) Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de S en 0 ?
3. Rappeler la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale.
   Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}$.

Ex 54 : [CCINP 2022]

1. Calculer $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} u^n$ pour tout $u \in \,]-1,1[$.
3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t$.
   Justifier que f est développable en série entière pour $x \in \,]-1,1[$, et exprimer ce développement.

Ex 55 : [CCINP 2022] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé aussi. Pour cela :

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?
3. Montrer le résultat voulu.

(BONUS) On suppose que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Comparer les moyennes arithmétiques de P et P'.

Ex 56 : [IMT 2 2022] Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Séance du 08/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 57 : [CCINP 2022] Soit E un espace euclidien, $p \in \mathbb{N}$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de E telle que : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i, e_j \rangle < 0$.

1. Comparer $\lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle$ et $|\lambda_i| . |\lambda_j| \langle e_i, e_j \rangle$.
2. Comparer $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k \right\|^2$ et $\left\| \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k \right\|^2$.
3. Montrer que $(e_1, ..., e_{p-1})$ est libre.

Ex 58 : [CCINP 2022] Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base $\mathcal{B}$ orthonormalisée selon le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

1. Rappeler le procédé de Schmidt ainsi que l'expression des ε_i en fonction des e_i.
2. On note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$.

   Prouver que $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \prod_{i=1}^{n} (e_i \mid \varepsilon_i)$.
3. Montrer que pour toute base $\mathcal{B}''$ orthonormale de E, on a :

   $|\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}))| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|e_i\| \quad (*)$
4. Prouver que : $(*)$ devient une égalité si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B})$ est diagonale .

Ex 59 : [CCINP 2022] On note $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et φ définie sur E^2 par $\varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} fg$. On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

1. Montrez $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.
2. Montrez que φ est un produit scalaire sur E.
3. Montrez $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{I}$.
4. Exprimez $\hat{f}$ l'image de $f \in E$ par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Ex 60 : [CCINP 2022] Soit E un espace euclidien de dimension non nulle.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors p est un endomorphisme autoadjoint.
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
   (a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme autoadjoint.
   (b) Montrer que $(\operatorname{Ker} q + \operatorname{Im} p)^{\perp} = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.
   (c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Ex 61 : [IMT 2 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $XX^T X = -\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que X est symétrique.
2. Déterminer X.

Ex 62 : [IMT 1 2022] Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ ayant des valeurs propres positives. Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$tr(AU) \leq tr(A)$.

Ex 63 : [Navale 2019] Si u est un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien, montrer que $u \circ u = Id$ si et seulement si u est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Séance du 12/06 : Équations différentielles, calcul différentiel, fonctions vectorielles

---

Ex 64 : [CCINP 2022] Soit le système suivant : $\begin{cases} x' = z + \cos t \\ y' = y + \mathrm{e}^{3t} \\ z' = x + \sin t \end{cases}$.

1. Résoudre.
2. Trouver la solution telle que x et z soient bornées sur $\mathbb{R}_+$ et que $x(0) = z(0)$.

Ex 65 : [CCINP 2022] Soit l'équation différentielle $(*)$: $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$.

1. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Écrire $(*)$ sous forme d'un système différentiel linéaire.
3. Soit l'équation différentielle $(**)$: $t^2y'' + 4ty' + 2y = e^t$. À l'aide de la méthode de la variation des constantes, donner les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. On propose une autre méthode de résolution. Vérifier qu'il existe une solution particulière de $(**)$ de la forme $y : t \mapsto \dfrac{z(t)}{t}$, avec z une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En déduire l'ensemble des solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 66 : [CCINP 2022] Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ & & 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Prouver que $f \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. On pose $\overrightarrow{u_\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Trouver les θ tels que la dérivée partielle de f en $(0,0)$ selon $\overrightarrow{u_\theta}$ existe.
3. Existent-ils des dérivées partielles de f en $(0,0)$?
4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.
5. Est-ce qu'ils existent des dérivées partielles d'ordre 2 de f sur $\mathbb{R}^2$?

Ex 67 : [CCINP 2022] $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, \dfrac{x}{y}) \end{array}$

1. Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1}.
2. On pose $(u,v) = \Phi(x,y)$ et $f(x,y) = F(u,v)$.
   Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.
3. Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) + 2 = 0$
4. Résoudre $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$.

Ex 68 : [CCINP 2022] On a la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$x $\mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$ et Σ la surface représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les points critiques de f.
   f admet-elle un extremum global ?
2. Soit (a,b) un point critique de f, déterminer l'équation du plan tangent à Σ en $(a,b,f(a,b))$
3. Exprimer l'équation du plan tangent en $(1,1,1)$
4. Exprimer la différentielle de f en $(1,1)$ puis g telle que $g(x,y) = (f(x,y), f(x,y))$

Ex 69 : [IMT 2 2022] Soit l'équation différentielle $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions sous forme de somme d'une série entière .
2. Faire le changement de variable $x = t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' - z = 0$.
   En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$
3. Faire le changement de variable $x = -t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z'' + z = 0$.
   En déduire les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$.
4. Faire le raccordement des solutions pour en déduire la solution sur $\mathbf{R}$.

Ex 70 : [St Cyr 2019] Donner les extrema de $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

Séance du 14/06 : Variables aléatoires

Ex 71 : [CCINP 2022] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ telle que :

$$\forall n,k\in\mathbb{N},\ P(X=n,Y=k)=\begin{cases} e^{-b}\dfrac{b^n}{k!(n-k)!}a^k(1-a)^{n-k} & \text{si}\quad k\leq n\\ 0 & \text{si}\quad k>n\end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre ab. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X-Y$. Vérifier que Y et $X-Y$ sont indépendantes.

Ex 72 : [CCINP 2022] Soient A_1, A_2 et A_3 trois personnes venant dans cet ordre déposer une lettre à la poste dans laquelle il y a deux guichets. A_3 doit donc attendre que A_1 et A_2 aient fini. Soient X_1, X_2 et X_3 les temps d'attente respectifs au guichet des visiteurs et elles suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Soit Y le temps d'attente de A_3 avant d'accéder à un guichet.
Soit Z le temps total passé par A_3 (temps d'attente pour accéder à un guichet attendre le guichet et temps passé au guichet).

1. Déterminer la loi de Y (calculer $P(Y>k)$ d'abord).
2. Écrire Z en fonction de Y et X_3 puis déterminer la loi de Z.
3. Temps moyen passé par A_3 à la poste.

Ex 73 : [IMT 2 2022] Soit X une variable aléatoire suivant une loi gémoétrique de paramètre $p\in]0,1[$.

1. Que vaut $P(X\geq k)$, pour $k\in\mathbb{N}^*$?
2. Yves et Zak disposent chacun d'une pièce ayant la probabilité p de tomber sur pile. Yves lance la pièce jusqu'à l'obtention de pile, puis Zak fait de même. Quelle est la probabilité quiil faille deux fois plus de lancers à Zak d'obtenir pile que Yves n'en a eu besoin ?

Ex 74 : [ENSEA 2022] Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p et q.
Soit $A:\omega\to\begin{pmatrix} X(\omega) & -Y(\omega)\\ Y(\omega) & X(\omega)\end{pmatrix}$. Trouver la probabilité que A soit diagonalisable sur $M_2(\mathbb{R})$.

Ex 75 : [CCINP 2019] Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, suivent une loi de Bernoulli de même paramètre p.

1. Déterminer la loi suivie par $Y_n=X_nX_{n+1}$ et en déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Déterminer $cov(Y_i,Y_j)$ pour $i\neq j$; les Y_n sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Y_k$.
4. On pose $Z_n=\dfrac{1}{n}S_n$; montrer que $\forall a>0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(|Z_n-p^2|\geq a)=0$.

Ex 76 : [CCINP 2019] Soit X_n une variable aléatoire de probabilité uniforme, telle que $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\cdot$

1. On note $G_{X_n}(t) = E(t^{X_n})$; exprimer sous forme polynomiale $G_{X_n}(t)$, $G'_{X_n}(t)$ et $G''_{X_n}(t)$.
2. En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
3. On choisit $n = 4$; Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que X_4.
4. Exprimer $G_{Y+Z}(t)$ en fonction de $G_Y(t)$ et $G_Z(t)$; en déduire la loi de $Y + Z$.
5. Prouver qu'il existe au moins un n tel que $P(|X_n - E(X_n)| \geq n) \leq \dfrac{1}{n^2}\cdot$

Ex 77 : [Navale 2022] Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N},\ E(X^k) = E(Y^k)$. Montrer que X et Y ont la même loi.

Séance du 16/06 : Espaces vectoriels normé, suites, fonctions usuelles

---

Ex 78 : [Navale 2022] Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ dérivable, telle que $f(0) = 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \le f(x) < 1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Étudier la suite (u_n).
2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Quelle est la nature de $\sum u_n^2$?
3. On suppose toujours que $f'(0) \neq 0$. On pose $x_n = \ln(f(u_n))$, pour $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de (x_n) ? Nature de $\sum x_n$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
4. Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$. Étudier les suites (u_n) et (v_n).

Ex 79 : [CCINP 2022]

1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E.
   Montrer que K est fermé et borné.

   On s'intéresse à l'espace vectoriel $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, muni de la norme $\|.\|_2$, définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$.
2. On admet dans un premier temps que $\|.\|_2$ est une norme sur E.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto e^{inx}$.
   (a) Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $\|f_n - f_p\|_2 = 2\sqrt{\pi}$.
   (b) En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.
3. (a) Démontrer pour tous complexes u et v l'inégalité : $|uv| \leqslant \dfrac{|u|^2}{2} + \dfrac{|v|^2}{2}$. En déduire que pour toutes fonctions f et g de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2}\int_0^{2\pi} |g|^2$.
   (b) Soit $(f, g) \in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction :
   $h : \lambda \mapsto \displaystyle\frac{\lambda^2}{2}\int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2}\int_0^{2\pi} |g|^2$, démontrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$.
   (c) En déduire que $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

Ex 80 : [IMT 1 2022] On note $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E$, on note $\theta_n(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)t^n dt$.

1. Montrer que pour $P \in E$, $N(P) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\theta_n(P)|$ est bien défini.
2. Montrer que N est une norme.
3. (BONUS) Comparer les normes N et $\|.\|_\infty$, avec : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

Ex 81 : [Dauphine 2022] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et continue et $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x + t) = f(x)$.

Ex 82 : [ENSEA 2022] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation : $(E_n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe une unique solution x_n de (E_n) sur $\mathbb{R}_+$ et que $x_n \in [\dfrac{1}{2}, 1]$.
2. Montrer la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$.

Ex 83 : [IMT 2 2022]

1. Montrer que toute application continue f définie sur le segment $[0,1]$ et telle que $f(0) = 0$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_n$ sur $[0,1]$ avec $Q_n(0) = 0$.
2. Soit $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que G est dense dans F.

Ex 84 : [IMT 1 2021] Soit $E = \mathbb{C}[X]$, $P = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in E$. On définit la norme $\|.\|$ par :

$\forall P \in E, \|P\| = \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. Soit $b \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(b) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Étudier la continuité de f.
3. (BONUS) Déterminer $|||f|||$.