CCINP MP 2022

Ex 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $P_i = (X-a)^i$.

1. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $f : P \mapsto (X-a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver son noyau et son image.

Ex 2 : Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(u+v) \leq \dim(\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$

Ex 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\} \\ \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E \end{cases}.$$

Ex 4 : On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto aM + bM^T$ où a et b sont des réels.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'espace S des matrices symétriques et de l'espace A des matrices antisymétriques.
2. Exprimer f en fonction de p et q, avec p la projection sur S parallélement à A et q la projection sur A parallélement à S.
3. Exprimer f^2 en fonction de f et Id.
4. Donner une CNS sur a et b pour que f soit un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id.

Ex 5 : Soit $n > 1$. On considère la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

1. Déterminer χ_A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Calculer $\det A$.

Ex 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ si et seulement si u et v admettent une base commune de vecteurs propres.
2. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Discuter du nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Ex 7</u> : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est diagonalisable.
   Montrer que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
2. On suppose que f^2 est diagonalisable et que f est inversible.
   (a) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f^2.
   Montrer que le polynôme $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X^2 - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.
3. On suppose que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   Montrer que f est diagonalisable.
4. Montrer que si f^2 est diagonalisable, alors f n'est pas nécessairement diagonalisable.

<u>Ex 8</u> : Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n et u l'endomorphisme de E qui à $P(X)$ associe $P(1-X)$.

1. Calculer $u \circ u$. En déduire les valeurs propres de u. Que peut-on dire de u ?
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Que peut-on dire sur le graphe de f si $f(1-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
3. En déduire les espaces propres de u. Est-ce que u est diagonalisable ?

<u>Ex 9</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.
2. (a) Énoncer des propriétés polynomiales de diagonalisation de matrices.
   (b) On suppose que B est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable, puis montrer que $A = 0$.
3. Trouver une CNS sur A pour avoir : A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

<u>Ex 10</u> : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} b_i X^i$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i b_i$. On admet que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E.
On pose $F = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$.

1. F est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donner une base de F.
2. Soit $P = X$. Déterminer $d(P, F)$ (on pourra chercher une base orthonormée de F).

Ex 11 : On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $]0,1[$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable sur $]0,1[$.

1. Montrer que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$ définit une produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$.
2. On pose $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto t$ et $F = vect(f_0, f_1)$. Donner une base orthonormée de F.
3. Déterminer pour quels réels a, b l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2(\ln(t) - at - b)^2 dt$ est minimale.

Ex 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
On définit le produit scalaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (A|B) = tr(A^T B)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr(M)} = 0\}$.
   (a) Montrer que H est un espace vectoriel de dimension à déterminer.
   (b) On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de J à H.

Ex 13 : Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = tr(A^T B)$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire.
2. Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
4. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $G = \mathrm{Vect}(I_n)$. Déterminer $G^\perp$ et $d(M,G)$.

Ex 14 : Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F.

1. (a) Montrer que $F = \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
   (c) Montrer que : $\forall x, y \in E,\ (x|p(y)) = (p(x)|y)$. Que signifie ce résultat ?
2. On considère p_F et p_G deux projecteurs orthogonaux sur deux sous-espaces vectoriels F et G respectivement. On suppose que H est un sous-espace vectoriel tel que $p_F \circ p_G$ est le projecteur orthogonal sur H.
   (a) Montrer que $F \cap G = H$.
   (b) Montrer que $p_G \circ p_F = p_F \circ p_G$.
   (c) On suppose réciproquement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
   Montrer qu'il existe H sous-espace vectoriel de E tel que $p_H = p_F \circ p_G$.

Ex 15 :

1. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
2. Soit p un projecteur orthogonal de rang r, montrer que $\operatorname{tr} p = r$.
3. Montrer que pour tout vecteur x, $\langle x, p(x)\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle$.

Ex 16 : Soit E un espace euclidien et F le sous-espace vectoriel de E engendré par u, où $u \in E$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit p la projection orthogonale sur F.

1. (a) Soit $x \in E$, montrer que $p(x) = \dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}.u$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{UU^T}{U^T.U}$ où $U = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
2. Soit $A = UU^T$.
   (a) Montrer que A est diagonnalisable.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. En posant $M = I_n - UU^T$ et par observation de la matrice, déterminer des caractéristiques sur M.

Ex 17 : Soit E un espac euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u possède deux valeurs propres réelles non nulles de signes opposés. Montrer qu'il existe $z \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(z)$ et z soient orthogonaux.
2. On suppose u autoadjoint de trace nulle. Montrer qu'il existe $z \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(z)$ et z soient orthogonaux.
3. On suppose que u est simplement de trace nulle, montrer que la conclusion précédente deumeure. On pourra introduire la matrice A canoniquement associée à u et l'endomorphisme v canoniquement associé à $B = A + A^T$.

Ex 18 : Soit $U_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Sans calculer aucun déterminant, déterminer les valeurs propres de U_n et leur multiplicité.
2. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   On pose : $\forall i \in [\![2, n]\!],\ f_i = \dfrac{1}{i-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} e_k - e_i$.
   Montrer que $(f_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de l'espace propre associé à 0 de U_n.
3. (a) Déterminer une base orthonormale de cet espace propre.
   (b) Donner la formule de diagonalisation de U_n.

Ex 19 : Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$. Un tel endomorphisme est dit antisymétrique.

1. Que dire de f^2 ? Montrer que : $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle = 0$ et $\langle f^2(x), x\rangle \leq 0$.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Que peut-on dire de $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$?
3. Déterminer une relation entre $\det(A)$ et $\det(A^T)$. Montrer que si f est bijective, alors la dimension de E est paire.
4. Montrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Ex 20</u> : Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques, c'est-à-dire :

$$u \in \mathcal{A}(E) \Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \langle u(x)|y\rangle = -\langle u(y)|x\rangle .$$

1. Montrer que : $[\forall x \in E,\ \langle u(x)|x\rangle = 0] \Leftrightarrow u \in \mathcal{A}(E)$.
   Pour $u \in \mathcal{A}(E)$, quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
2. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{A}(E)$ à l'aide de leur matrice dans une base orthonormée.
3. Soit F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

   On suppose maintenant que $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$.

4. (a) Montrer que u^2 est un endomorphisme autoadjoint.
   Soit x un vecteur propre de u^2. Montrer que $F = vect(x, u(x))$ est un sous-espace stable par u.

   (b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & & (0) & & \\ \lambda_1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & & & & \\ & & \lambda_2 & 0 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & (0) & & & & 0 & -\lambda_p \\ & & & & & & & \lambda_p & 0 \end{pmatrix}$$
, avec $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des réels non nuls.

<u>Ex 21</u> : Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0 \in E$ tels que $B(x_0, r) \subset F$. Montrer que :
   $\forall y \in E, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*,\ \alpha x_0 + \beta y \in B(x_0, r)$. En déduire que $F = E$.
3. On suppose ici que $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{N}$ est un fermé de E. Montrer que $vect(\mathcal{N})$ est d'intérieur vide (on pourra considérer I_n), puis que $\mathcal{N}$ est aussi d'intérieur vide.

<u>Ex 22</u> : Soit E un espace vectoriel normé.

1. Montrer que E est connexe par arcs.
2. Soit F un autre espace vectoriel normé, et $f : E \to F$ une fonction continue. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs pour tout connexe par arcs A de E.
3. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Soit U une partie de E. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_U$ est continue sur E si U est à la fois ouvert et fermé dans E. En déduire les parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermée dans E.

Ex 23 : Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, déterminer la nature de la série $\sum (u_n)^k$.

Ex 24 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
   (b) Trouver d'une autre manière la limite de (I_n).

Ex 25 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ converge.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos(t)} dt$ converge.

Ex 26 :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
3. On pose $I_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p(t) dt$ et $u_p = (p+1) I_p I_{p+1}$, pour $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante et que $I_p \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Ex 27 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+x)^n}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$.

1. Jusitifer l'existence de J_n et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.
2. Calculer f_n'. Trouver une relation entre J_n et J_{n+1}. En déduire un équivalent de J_n.
3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum J_n x^n$.
4. Exprimer sa somme sous forme d'intégrale.

Ex 28 : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. On note f la somme de cette série de fonctions.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et en déduire, pour $x > 0$, une expression explicite de $f'(x)$.
5. Déterminer f puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Ex 29 : On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x > 0$.

1. Justifier l'existence et le caractère $\mathcal{C}^1$ de S, puis donner une expression de $S'(x)$.
2. En déduire la monotonie de S.
3. Montrer que $S(x+1) + S(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et en déduire un équivalent simple de S en 0^+.

Ex 30 : Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et on pose $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} e^{-nx} dx$.

1. Montrer que S_n existe.
2. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $T_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx} dx$. Montrer que $T_{a,b}$ existe et en donner une expression (on montrera que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$).
3. Montrer que $S_0 = (p+1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n$.
4. En déduire que (S_n) converge.
5. Montrer que $(p+1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} dx$.

Ex 31 : Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (\ln(x))^q dx$.

1. (a) Étudier la convergence de cette intégrale.
   (b) Calculer cette intégrale.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \exp(x \ln(x)) dx$.

Ex 32 :

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln^2(x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2n} \ln^2(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer son intégrale.

3. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2} dx$. Écrire I comme somme d'une série.
4. Comment calculer I à 10^{-N} près ? Donner le résultat pour $N = 3$.

Ex 33 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$?
2. Calculer la somme de cette série.

Ex 34 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}} dt$.

1. Montrer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut au moins 2.
2. Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Pour $x \in]-2, 2[$, montrer que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. En déduire la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ et montrer que $R = 2$.

Ex 35 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$, sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 36 : Donner les rayons de convergence et calculer les sommes des séries entière $\sum nx^n$, $\sum 2nx^{2n}$ et $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

Ex 37 :

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Arctan} u| \leqslant |u|$.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t$.
   (a) Domaine de définition de F ?
   (b) Domaine de continuité de F ?
   (c) Domaine de dérivabilité de F ?
   (d) Déterminer F'.
   (e) En déduire F.

Ex 38 : Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner Γ'.

3. Montrer que : $\forall x \in]1,+\infty[,\ \forall \lambda \in]-1,1[\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{1-\lambda \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}$.

Ex 39 : On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer F' sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 40 : On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}dt$ quand l'intégrale existe.

1. Justifier l'existence de $z(0)$ et montrer que $z(0) = \sqrt{\pi}$.
2. Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = -\dfrac{1}{2(x+i)}z(x)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle et imaginaire de $-\dfrac{1}{2(x+i)}$. En déduire $z(x)$.

Ex 41 : On considère l'équation différentielle : $4xy'' + 2y' - y = 0 \quad (E)$. Trouver l'unique solution développable en série entière à l'origine respectant la condition $y(0) = 1$.

Ex 42 : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $P(X \leq n)$ et $P(X \geq n)$.
2. Donner $P(U = n)$ et $P(V = n)$.
3. Que peut-on dire des événements $(X = n) \cap (Y = n)$ et $(U = n) \cap (V = n)$? Les événements U et V sont-ils indépendants ?
4. Donner l'espérance de U et de V.

IMT 1 MP 2022

Ex 43 : Quels sont les polynômes complexes P tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ (en notant $\mathbb{U}$ le cercle unité) ?

Ex 44 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

1. A-t-on nécessairement $BA = 0$?
2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ tr\left((A+B)^p\right) = tr(A^p) + tr(B^p)$.
3. Déterminer une relation entre $\mathrm{rg}\,(A)$ et $\mathrm{rg}\,(B)$.

Ex 45 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M^2 + M + I_n = 0$.

1. Montrer que n est pair.
2. Déterminer $\operatorname{tr}(M), \operatorname{rg}(M)$ et $\det(M)$.
3. Donner un exemple pour $n = 2$, puis déterminer toutes les solutions.

Ex 46 : Soit D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X],\ n \geqslant 1$.

1. Trouver son polynôme caractéristique.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'application f telle que $f^2 = D$.

Ex 47 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + I_n = 0$. Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est un entier.

Ex 48 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

Ex 49 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$.

Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé. Déterminer les autres valeurs propres et vecteurs propres.

Ex 50 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner une expression de $P(B)$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Ex 51 : Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^n = NM = 0$. On suppose de plus que M est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + N$ est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 52 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \in [0, 1[$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que cela est faux lorsque l'on suppose seulement que :
   $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Ex 53 : On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^n}$.

1. Montrer que la suite (a_n) converge et donner sa limite.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

Ex 54 : On pose $u_n = \displaystyle\int_n^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ u_n est-elle correctement définie ?
2. Nature de $\sum u_n$?

Ex 55 : On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} t^n}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que u_n est bien définie.
2. Calculer u_n.

Ex 56 : Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^\alpha}{a(1+a)...(1+a^n)}$.

Ex 57 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Nature de la série $\sum u_n$ (on pourra sommer par paquet).

Ex 58 : Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Ex 59 : Pour $(n, x) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^3}{n + x}$.

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$ et sur $[0, 1]$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Ex 60 :

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2 ix}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g n'est pas DSE au voisinage de 0.

Ex 61 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Ex 62 : On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner un équivalent de f en 1, sachant que $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-v)}{\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

Ex 63 : Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ et f sa somme.

1. Rayon de convergence de cette série ?
2. Lien entre f et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{x}sin(t)}dt$?

Ex 64 : On admet : $\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soient $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte. Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

IMT 2 MP 2022

Ex 65 : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1$.

1. Déterminer n tel que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n.
2. Dans les cas où P_n n'est pas divisé, calculer le reste de la division euclidienne

---

Ex 66 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. A est-elle inversible ? Si oui, donner A^n, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ex 67 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre p.

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. On suppose que $\dim(E) = n$ et $p = n$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
   (b) Quelle est la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$? On appelle A cette matrice.

(c) A est-elle diagonalisable ?

3. $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Donner un exemple de f dans $\mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre n, et d'une base telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice A.
4. (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(t(I_n + A))$.

   (b) Résoudre : $\begin{cases} X'(t) &= X(t) + AX(t) \\ X(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{cases}$.

Ex 68 :

1. Donner la définition de la somme directe de n espaces vectoriels ($n \geqslant 2$).
2. Soit f un endomorphisme, λ, μ deux valeurs propres distinctes.
   Démontrer que E_λ, E_μ sont en somme directe. Que dire si le nombre de sous espaces propres augmente ?
3. Soit E un espace muni d'une structure euclidienne. Démontrer qu'une partie et son orthogonal sont en somme directe.
4. Soit f un endomorphisme et A sa matrice associée, dans une base $\mathcal{B}$ de E, avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Que dire des sous-espaces stables en observant la matrice ?

Ex 69 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[0, 1]$, telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A.
   Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et que pour $\omega > 0$, $|\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$.

Ex 70 : Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels non tous nuls. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Quel est le rang de A ? Que peut-on en déduire sur son spectre ?
3. Calculer A^2. En déduire le spectre et le polynôme caractéristique de A.

Ex 71 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{Tr}\, A$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

Ex 72 : Soit l'application $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & X^n \times P(\dfrac{1}{X}) \end{array}$.

1. Montrer que l'application u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et exprimer son polynôme minimal.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Ex 73 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

Ex 74 : Pour $n \geq 2$, on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'on définit φ qui à $P \in E$ associe $\varphi(P) = (X^2 + X)P(1) + (X^2 - X)P(-1)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Déterminer l'image et le noyau de φ.
2. Déterminer les éléments propres de φ. Est-il diagonalisable ?

Ex 75 : On pose E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles. On pose $\phi : f \longrightarrow F$ avec $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour x différent de 0 et $F(0) = f(0)$

1. Montrer que ϕ est un endomorphismes de E
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ.

Ex 76 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $a \in E$ un vecteur normé.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle a, x\rangle a$, endomorphisme de E.
Monter que : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.

1. Déterminer les α tels que f_α soit bijectif.
2. Trouver les valeurs propres de f_α.

Ex 77 : Dans tout l'exercice, on considère A une matrice antisymétrique.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top AX = 0$.
2. Qu'en déduire des valeurs propres réelles de A ? À quelle condition A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. On pose : $M = A + I_n$, montrer que M est inversible, est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que $K = M^{-1}M^\top$ est orthogonale.
5. Soit B une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictements positives, montrer que $A + B$ est inversible.

Ex 78 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit (a, b) une famille libre de E et f : $x \mapsto (a|x)a + (b|x)b$ définie sur E.

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Trouver les éléments propres de f.

Ex 79 : On pose pour tout l'exercice $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Ex 80 : Exprimer $\sin 3x$ comme polynôme de $\sin x$. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est irrationnel.

Ex 81 : On pose la suite$(u_n)_n$ telle que $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Étudier la suite $(u_n)_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_n$.

Ex 82 :

1. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\cos x = nx$.
2. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite ainsi trouvée. Montrer une éventuelle monotonie et une éventuelle limite de cette suite.

Ex 83 : On pose pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^p$.

1. Calculer $S_1(n)$ et $S_2(n)$ et en donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $S_p(n)$ quand n tend vers $+\infty$, pour p quelconque fixé.

Ex 84 : Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \ln\left(\dfrac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right)$

Ex 85 : Déterminer la nature de $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

Ex 86 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \min\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) sur des ensembles à préciser.

Ex 87 :

1. Définition de la convergence uniforme de (f_n) vers f sur I.
2. Démontrer le théorème de la continuité pour la convergence uniforme (on remarquera que : $f(x)-f(a)=f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(a)+f_n(a)-f(a)$).
3. Soit $n\in\mathbb{N}$ et on pose $f_n : x\mapsto \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la convergence simple, puis uniforme de (f_n).

Ex 88 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t\mapsto \dfrac{n}{\sqrt{t}}\ln\left(1+\dfrac{1}{nt}\right)$ et $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n$.

1. Montrer que l'intégrale I_n converge.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Ex 89 : Pour $x\in[0,+\infty[$, on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{x}{n})$.
Montrer que f est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Ex 90 : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan(t))^n\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de la suite (a_n).
2. Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}$, une relation entre a_{n+2} et a_n.
3. On considère $fx\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Déterminer le domaine de définition de f.
4. Calculer f.

Ex 91 : On définit $f : x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-xt}dt$ quand l'intégrale existe. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre sur un intervalle à préciser. Résoudre celle-ci.

Ex 92 : Soit $f : x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt$ si l'intégrale converge.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $f'(x)$ sous forme d'intégrale.
4. Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Ex 93 : Soit $(E) : y''+2y'+y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que les solutions de E ont une limite finie en 0^+.

Ex 94 : Soit S l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation :

$$(E)\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. Soit f appartenant à S.
   Soit g l'application telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$: $g(u,v) = f(x,y)$ avec $\left\{\begin{array}{lcl} u & = & 2x+y \\ v & = & 2x-y \end{array}\right.$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.
4. En déduire une expression simplifiée de l'équation (E).
5. Déterminer les solutions de (E).

Ex 95 :

1. Soit X suivant une loi géométrique. Rappeler de quelle loi il s'agit, donner un exemple concret d'utilisation (justifier).
2. Rappeler la définition d'une fonction génératrice, puis donner celle de X.
3. Rappeler comment on obtient l'espérance et la varianace à l'aide de la fonction génératrice et faire le calcul pour X.

ENSEA MP 2022

Ex 96 : On note $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constiués respectivement des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{K})$?
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = A_n(\mathbb{K}) \oplus S_n(\mathbb{K})$.
3. On pose $\varphi : M \mapsto M^T$. Déterminer $\det(\varphi)$.

Ex 97 : Trouver l'enemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ telles que : $A^3 + A = 2I_n$.

Ex 98 : On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par : $\forall P \in E,\ f(P) = (X-3)(X+1)P' - XP$. Donner les valeurs propres et vecteurs propres de f.

Ex 99 : Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\int_0^1 t^i P(t)dt\right) X^i$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Montrer que :$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt = 0$. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$.
3. Quelle est la matrice de f dans la base canonique ? Est-elle inversible ? diagonalisable ?
4. En fonction de n, déterminer un développement asymptotique à deux termes de $tr(f)$.

Ex 100 : Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$, avec P_n un polynôme réel donc on précisera le degré et le coefficient dominant.
2. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{m,n} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t)P_n(t)e^{-t^2}dt$. Calculer $I_{m,n}$, sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

Ex 101 : Soit $h \in \mathcal{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$ et $f_n : x \mapsto k(x)\sin^n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étude de la convergence simple de (f_n).
2. Étude de la convergence uniforme de (f_n).

Ex 102 : Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}dt$.

1. Montrer l'existence de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite

Ex 103 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{dt}{(1+t^2)(1+n^2t^2)}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$.
2. Calculer le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
3. Étudier la limite de la somme en R et $-R$.

Ex 104 : Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Donner pour tout $k \in \mathbb{N}, F^{(k)}(0)$ puis donner, si possible, le développement en série entière de F.

Navale MP 2022

Ex 105 : Soit E un espace vectoriel (pas forcément de dimension finie). Soient p un projecteur de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = Id_E$ pour un certain n de $\mathbb{N}^*$. On pose $V = \mathrm{Im}\,(p)$ et on suppose que V est stable par u. On définit $q = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$. Montrer que q est un projecteur, dont le noyau est un supplémentaire stable par u.

Ex 106 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, (x_0, y_0) une famille libre, u et v deux formes linéaires sur E, et $f : x \mapsto u(x)x_0 + v(x)y_0$. Déterminer les éléments propres de f.

Saint-Cyr MP 2022

Ex 107 :

1. Coder une fonction `PremierDiviseur` qui retourne pour $n \geq 2$ son plus petit diviseur premier.
2. Soient $n \geq 2$ et p un diviseur premier de n. On rappelle que $\varphi(n)$ désigne l'indicatrice d'Euler. Montrer que si $p^2|n$, alors $\varphi(n) = p\varphi\left(\dfrac{n}{n}\right)$, sinon $\varphi(n) = (p-1)\varphi\left(\dfrac{n}{n}\right)$.
3. En déduire une fonction récursive en PYTHON qui calcule $\varphi(n)$.

Ex 108 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + \left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)$. Préciser l'ensemble de définition de f est calculer sa somme.

Dauphine 2022

Ex 109 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $q : x \mapsto x^T Ax$. On note $C(q) = \{x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ q(x) = 0\}$.

1. Calculer $\nabla(q)$.
2. Trouver le minimum et le maximum de q sur la sphère unité.

CCINP MP 2021

Ex 110 : Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle « radical » de I et l'on note $\sqrt{I}$, l'ensemble : $\sqrt{I} = \{x \in A \,|\, \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.

2. Donner le radical de deux exemples simples d'idéaux de A.

3. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que :

- ***a.*** $I \subset J \Longrightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$;
- ***b.*** $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;
- ***c.*** $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

4. Application dans $\mathbb{Z}$: on donne $m = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i$ et $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout i de 1 à k, $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.
Montrer que $m\mathbb{Z} = \sqrt{n\mathbb{Z}}$.

Ex 111 : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soit p et q deux projecteurs de E. On suppose que $Im(p) \subset ker(q)$.

1. Montrer que $Im(p) \cap Im(q) = \{0\}$.
2. Soit l'endomorphisme $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est la projection sur $Im(p) \oplus Im(q)$ parallèlement à $ker(p) \cap ker(q)$.

Ex 112 : Résoudre le système

$$\begin{cases} a^2x + a^3y + az &= m \\ a^2x + y + az &= m \\ x + ay + a^2z &= m \end{cases}.$$

Ex 113 : Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre m :

$$\begin{cases} 2mx + y + z = 2 \\ x + 2my + z = 4m \\ x + y + 2mz = 2m^2 \end{cases}$$

Ex 114 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$, on considère f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est un projecteur, la condition « f est de rang 1 » est-elle suffisante ? Nécessaire ?
2. On suppose f de rang 1 et de trace 1, montrer que f est un projecteur.
3. Construire une base de $\mathcal{L}(E)$ de projecteurs.

Ex 115 : Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im}(f)$
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f^2 + id_E)$.
3. Montrer que f n'est pas injective.
4. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = 2$.
5. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 116 : Soient f, g des endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que f est nilpotent.

2. On suppose jusqu'à la fin que $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e telle que $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la matrice de g dans la base e soit triangulaire supérieure de diagonale $\operatorname{Diag}(\lambda, \lambda+1, \ldots, \lambda+n-1)$.

Ex 117 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts.

On définit $V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et le vecteur colonne $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$.

1. Exprimer le produit $V(x_0, \ldots, x_n).A$ à l'aide du polynôme P.

2. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $\det(T) = 1$ et

$$V(x_0, \ldots, x_n).T = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \displaystyle\prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (x_n - x_k) \end{pmatrix}$$

3. En déduire par récurrence une expression de $\det(V(x_0, \ldots, x_n))$.

4. Soit $(r_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(r_k) \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la question 1, que P est dans $\mathbb{R}[X]$.

Ex 118 : Soit la matrice M_n telle que $\forall i, j$, $m_{i,j} = i$ si $i = j$, 1 sinon. On note P_n son polynôme caractéristique.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $P_{n+1} = (X - n)P_n - X(X-1)...(X-(n-1))$. On pourra effectuer les opérations $L_j \leftarrow L_j - L_{j-1}$, $\forall j \geq 2$.

2. Par récurrence sur n, montrer que $\forall n \geq 2$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $(-1)^{n-k} P_n(k) > 0$.

3. Montrer que M_n admet exactement une valeur propre dans chaque intervalle $]1,2[$, $]2,3[$, ..., $]n-1, +\infty[$.

Ex 119 :

1. **a.** Déterminer trois polynômes $A, B, C \in \mathbb{R}_2[X])$ tels que : $\begin{array}{l} A(-1) = 1, A(0) = 0, A(1) = 0 \\ B(-1) = 0, B(0) = 1, B(1) = 0. \\ C(-1) = 0, C(0) = 0, C(1) = 1 \end{array}$

   b. Montrer que (A, B, C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. On note $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ définie par :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], v(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C$.

   a. Montrer que $\mathrm{rg}(v) \leqslant 3$. Qu'en déduit-on sur $\mathrm{Ker}\,(v)$?

   b. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(v)$.

   c. Déterminer les valeurs propres de v. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

<u>Ex 120</u> : Soient $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

2. On pose $B = 2A - tr(A)I_n$. Calculer $\det(B)$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible. Dans ce cas, déterminer B^{-1}.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

<u>Ex 121</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\det A$ et $\mathrm{rg}\, A$ pour $(a, b) = (1, 2)$.

2. Calculer $\det A$ et $\mathrm{rg}\, A$ dans le cas général (distinguer plusieurs cas possibles selon les valeurs de a et b).

3. A est-elle inversible ?

4. Déterminer A^{-1} lorsque A est inversible.

5. A est-elle diagonalisable ?

6. Déterminer ses valeurs propres.

<u>Ex 122</u> : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1. Soit p un projecteur de E. Exprimer $\det(\mathrm{id}_E + \lambda p)$ en fonction de $\mathrm{rg}(p)$ et de λ.

Soit $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On note $B = V^tV$.

2. Quel est le rang de B ?

3. B est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés.

4. On pose $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j} = \begin{cases} a_i a_j & \text{si } i \neq j \\ 1 + a_i^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

Déterminer $\det M$.

Ex 123 : [Incomplet] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

avec $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$.

1. On suppose dans cette question que $a = b = c = d = e = 0$. Déterminer χ_u et π_u (le polynôme minimal de u).

2. Soit $k \in [\![1, 5]\!]$. Calculer $u^k(e_1)$.

3. Soit P un polynôme unitaire tel que $P(u)(e_1) = 0$.

- ***a.*** Montrer que $\deg(P) \geq 5$.
- ***b.*** Déterminer un polynôme P tel que $\deg(P) = 5$ et $P(u)(e_1) = 0$.
- ***c.*** Déterminer π_u.
- ***d.*** Déterminer χ_u par deux méthodes différentes.

4. On pose $a = c = e = 0$, $b = -2$ et $d = 4$. u est-il diagonalisable ?

Ex 124 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit M$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Soit f et g deux endomorphismes de E admettant chacun n valeurs propres distinctes. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors leurs vecteurs propres sont identiques.

2.
- ***a.*** Trouver une matrice A telle que $A^2 = M$.
- ***b.*** Trouver toutes les matrices A telles que $A^2 = M$.

Ex 125 : On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.

2. Soit M une matrice telle que $M^2 + M = A$.

- ***a.*** Montrer que les seules valeurs propres possibles pour M sont 1, 2, -2, -3.
- ***b.*** Montrer que M est diagonalisable.

3. Quelle est la forme de ces matrices M ?

Ex 126 :

1. Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel dont on donnera la dimension.

2. Si D est diagonale, à coefficient diagonaux deux à deux distincts, montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une base de $D_n(\mathbb{C})$.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A + B$ sont-elles diagonalisables ?
4. Pour quelles valeurs de n, l'ensemble des matrices diagonalisables est-il un sous espace vectoriel ?

Ex 127 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) \neq 0$
Soit f définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = tr(A)M - tr(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de f.

Ex 128 : On note f l'endomrophisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto M + 2M^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $tr(f)$ et $\det(f)$.

Ex 129 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. a. Si $u^2 = 0$, montrer que $\text{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$.
   b. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq \frac{n}{2}$. Donner un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = r$.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent.
   a. Montrer que si u admet n valeurs propres distinctes, alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.
   b. Montrer que si u et v sont diagonalisables, alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

Ex 130 : Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^4 = A^2$ et $tr(A) = n$.

Ex 131 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ soit libre.
Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Ex 132 : On donne deux complexes distincts non nuls λ, μ et deux matrices complexes carrées de taille p, telles que $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse (on pourra calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$).
2. Exprimer A en fonction de M et I_p.
3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteur.
4. M est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

Ex 133 : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, un entier $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} & & & c \\ & (0) & & \vdots \\ & & & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

2. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

   a. Montrer que : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0$.

   b. Donner les expressions des valeurs propres de A.

   c. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur a, b et c) pour que A soit diagonalisable.

Ex 134 : Soit b un réel et $n > 1$. On considère la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & b \end{pmatrix}$

On appelle J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Exprimer A comme combinaison linéaire de J et I_n.

2. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à A.

4. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable, puis la diagonaliser.

5. Calculer $\det A$.

Ex 135 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u, d'ordre de multiplicité $m \geqslant 1$. On pose $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$.

1. *a.* Montrer qu'il existe un polynôme P tel que : $E = \mathrm{Ker}(v^m) \oplus \mathrm{Ker}(P(u))$ et
$E = \mathrm{Ker}(v^{m+1}) \oplus \mathrm{Ker}(P(u))$.
En déduire que : $\mathrm{Ker}(v^m) = \mathrm{Ker}(v^{m+1})$.

   b. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(v^m) \oplus \mathrm{Im}\,(v^m)$.

2. On considère une autre valeur propre λ' de u, distincte de λ, d'ordre de multiplicité m'. On pose : $v' = (u - \lambda' \mathrm{id}_E)^{m'}$.

   a. Montrer que $\mathrm{Ker}(v') \cap \mathrm{Ker}(v^m) = \{0_E\}$.

   b. Montrer que $\mathrm{Ker}(v') \subset \mathrm{Im}\,(v^m)$.

Ex 136 : On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On pose également :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1}I_2 & a_{1,2}I_2 \\ a_{2,1}I_2 & a_{2,2}I_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & O_2 \\ O_2 & B \end{pmatrix}.$$

On suppose A et B diagonalisables. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de B, on pose :

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que U_1 et U_2 sont vecteurs propres de $\tilde{A}$ et que V_1 et V_2 sont vecteurs propres de $\tilde{B}$.
2. Montrer que $W = x_1V_1 + x_2V_2$ est vecteur propre de $\tilde{A}$ et de $\tilde{B}$.
3. Comment former une base de $\mathbb{R}^4$ avec des vecteurs propres communs à $\tilde{A}$ et à $\tilde{B}$?
4. $M = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

Ex 137 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. On rappelle que $A_0 = 1$.

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer A_n en distinguant deux cas selon la parité de n.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Ex 138 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que : $\forall P \in E$, $\left| \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$.

Ex 139 : [Incomplet] Soit m un entier supérieur ou égal à 3. On définit le produit scalaire suivant : soient $X, Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y \rangle = X^T Y$.
Soit n un entier supérieur ou égal à -1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est dite de type n lorsque $A^T = A^n$.

1. Comment appelle-t-on une matrice de type 1 ? Donner un exemple de matrice de type -1. Pour la suite, on prendra $n > 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $N(x)$ suivante : $N(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$
   a. Montrer que pour tout $k > 0$, $N(x)^k = N(kx)$.
   b. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $N(x)$ est une matrice de type n.

   Pour la suite, on prendra $m = 3$.
   Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ une matrice de type n. Soit $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tel que $B = A^{n+1}$.
3. Montrer que $A^{n^2} = A$.

4. Montrer que $B^n = B$ puis que B est symétrique. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?

5. Montrer que -1 ne peut pas être valeur propre.

Ex 140 : Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la matrice dans la base canonique de la projection vectorielle orthogonale p sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Ex 141 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une application ϕ par :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \phi(M, N) = \operatorname{tr}(M^\top N)$$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire.

2. Pour $(M, N) \in O_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\phi(M, N) \leq n$.

3. Pour $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\operatorname{tr}((AB)^2) \leq \operatorname{tr}(A^2B^2)$

4. Pour $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\operatorname{tr}((AB + BA)^2) \leq 4\operatorname{tr}(A^2B^2)$.

Ex 142 : Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soient $x, y \in E$ et si $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$, on rappelle que $(x|y) = X^TY$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M^T = Mat_{\mathcal{B}}(v)$.
On suppose que u et v commutent.

1. **a.** Montrer que : $\forall x, y \in E,\ (u(x)|y) = (x|v(y))$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = (\operatorname{Im}(v))^\perp$.

c. Établir que : $E = \operatorname{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(v)$.

d. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(vu) = \operatorname{Ker}(v)$ et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(v)$.

2. Montrer que u et v ont le même spectre et les mêmes sous-espaces propres.

3. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint si et seulement s'il est diagonalisable.

Ex 143 : Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme autoadjoint de E.

1. Soit $\alpha = \min(\operatorname{Sp}(u))$, $\beta = \max(\operatorname{Sp}(u))$. Montrer que $\forall x \in E,\ \alpha\|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \beta\|x\|^2$.

2. Montrer que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \iff \forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$, puis que
$\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in E\backslash\{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$.

3. On suppose que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall x \in E,\ u(x) = 0 \iff \langle u(x), x\rangle = 0$.

4. Soit v un autre endomorphisme autoadjoint de E. On suppose $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $\operatorname{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $\operatorname{Sp}(u + v) \subset \mathbb{R}_+$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker}(u + v) = \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)$.

c. Montrer que $\operatorname{Im}(u + v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.

Ex 144 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{R}$ et $a \in E$ un vecteur unitaire. On définit un endomorphisme u_k de E par :
$\forall x \in E,\ u_k(x) = x + k\langle x|a\rangle a$.

1. Calculer $u_k(a)$ et montrer que u_k est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. L'endomorphisme u_k est-il autoadjoint ? Préciser son spectre.

3. Trouver les valeurs de k telles que u_k est un automorphisme. dans ce cas, expliciter u_k^{-1}.

<u>Ex 145</u> : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n, u un endomorphisme autoadjoint de E.

1. Soit p un entier naturel impair.

   a. Montrer l'existence d'un endomorphisme autoadjoint v tel que $v^p = u$ (On pensera à la matrice représentative de u).

   b. Montrer que v possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres disctinctes que u.

   c. Montrer que v est l'unique endomorphisme autoadjoint tel que $v^p = u$.

2. Soit p un entier naturel pair et non nul.

   a. A-t-on les mêmes résultats ?

   b. Que peut-on dire si u est positif ? (c'est-à-dire $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$)

   c. Que peut-on dire si u et v sont positifs ?

<u>Ex 146</u> : Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$ et $V_n \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. *a.* Soit $a \in E$, montrer que : $\dfrac{1}{n+1}\|u^{n+1}(a) - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   b. Exprimer $V_n \circ (u - \mathrm{Id}_E)$ en fonction de u^{n+1}.

   c. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

2. Si E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

3. Dans le cas général, on suppose $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ supplémentaires ; soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$.
Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs $V_n(x)$.

<u>Ex 147</u> :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in \,]0, 1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$. On pourra considérer la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.

3. On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite sous forme d'intégrale.

4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

<u>Ex 148</u> :

1. Donner la définition de la convergence d'une série puis montrer que si $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.
   a. On suppose que $\lim_{n\to\infty} nu_n = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, montrer que $\lambda = 0$.
   b. Montrer que $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$.
   c. Montrer que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge puis montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Ex 149 : Soit (a_n) une suite de réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \text{ et } c_n = \frac{1}{1+n^2 a_n}$$

1. a. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   b. Montrer que pour n suffisamment grand, $a_n \leq 2b_n$.
2. a. Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
   b. Montrer que si $\sum c_n$ diverge, alors $\sum a_n$ converge ou bien diverge.
3. On admet que la fonction $f\colon x \mapsto x + \frac{1}{1+n^2 x}$ admet un minimum sur $[0, +\infty[$ en $\frac{n-1}{n^2}$.
   a. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum c_n$ diverge.
   b. Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum c_n$ converge ou bien diverge.

Ex 150 : On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$a_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$, $b_n = \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$.

1. Montrer que $\sum b_n$ converge.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel pair.
3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
   $\sum b_n x^n$, $\sum a_n b_n x^n$, $\sum (a_n + b_n) x^n$.

Ex 151 : On pose, pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+t}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. Calculer la limite de f en 0^+.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de f.

Ex 152 : On pose : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie.
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est décroissante.
4. On pose : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.
5. Montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
6. Montrer que $g(x) - f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{2x+1}$ pour tout $x > 0$.
7. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Ex 153 : Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum f_n$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
4. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t$?
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ex 154 : On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$ et on définit quand cela est possible $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f. Pour quelles valeurs de x la série de définition de $f(x)$ converge-t-elle absolument ?
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de définition de f converge normalement sur $[1+a,+\infty[$. Que dire de f ?
3. Soit $b \in]0,1[$. La série converge-t-elle uniformément sur $[b, 1+a]$? Que dire de f ?

Ex 155 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.
On pose : $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

1. Montrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Ex 156 : Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence normale de cette série de fonctions.
2. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'existence de M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \forall x \in [0, A]$, $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)}\right| \leq \frac{M}{\ln(n)}$.

   Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que, pour $n \geq 2$, et x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\frac{f(x)}{x} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-kx}}{\ln(k)}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Ex 157 : On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(1+\mathrm{e}^{-t})}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f et F.
2. Montrer que f et F sont continues sur leurs ensembles de définition.
3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Donner un équivalent de f en 0.
4. Comparer f et F. On admet que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ex 158 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.
2. Montrer que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} S(x) = \pi$, en utilisant une comparaison série-intégrale.

Ex 159 :

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

   On note, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. La série de fonctions considérée converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? Converge-t-elle uniformément ?
3. Montrer que sa somme est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite en $+\infty$.
4. Résoudre $y' - y = -\frac{e^x}{e^x+1}$ sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Ex 160 :

1. Montrer que $I = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx$ est bien définie.

2. Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ et préciser son rayon de convergence.

3. Écrire I sous la forme d'une série.

4. Donner la valeur exacte de I en sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 161 : Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \cdot \ln(1-t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Ex 162 : Soit (E) l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.

1. Jusitifier l'existence d'une unique solution J_0 de (E) développable en série entière au voisinage de l'origine.

2. Montrer que J_0 est la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)dt$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de n. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

4. Montrer que J_0 est la fonction $x \mapsto \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))dt$.

Ex 163 : Soit : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (\ln x)^q \,\mathrm{d}x$.

1. *a.* Montrer que $I_{p,q}$ converge.

b. Calculer $I_{p,q}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}$.

Ex 164 :

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \ln n\, x^n$. En déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction S définie par : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln n\, x^n$

2. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D},\ S(x) = \displaystyle\frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

3. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

5. En remarquant que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$, déterminer un encadrement de S, puis un équivalent de S en -1.

Ex 165 : On pose, pour tout réel x : $u_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = r^n(\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx})$ avec r réel fixé tel que $|r| < 1$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer : $P_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, pour tout réel x.
3. Calculer : $\int_0^{2\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha)x^n$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

Ex 166 : Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence :

1. $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}, z \in \mathbb{C}$.
2. $g(x) = \ln\frac{2+x}{1-x}, x \in \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, dérivable sur $\mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

Ex 167 : Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, où z est une variable complexe et x est réelle :

1. $\sum (n+1)3^n z^{2n}$.
2. $\sum \frac{2^{(-1)^n}}{n} x^n$.

Ex 168 : À l'aide de séries entières, calculer les sommes

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser la première question).

Ex 169 :

1. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n(2n)!}{(2n+1)!}x^n$. En déduire celui de $\sum \frac{4^n(2n)!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

   On note $S(x)$ la somme de cette série.

2. S est-elle dérivable sur son intervalle ouvert de convergence ? Calculer explicitement $S'(x)$ et en déduire $S(x)$.

Ex 170 :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ converge.

2. Montrer que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est égale a l'intégrale de la question précédente.

3. Montrer que G définie pour $x \geq 0$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ est continue.

4. Montrer que G est $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer G''.

5. Montrer que G et G' admettent une limite en $+\infty$ et les calculer.

6. En déduire l'expression de G, puis la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Ex 171 : On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

3. Calculer f à l'aide de fonctions usuelles. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ex 172 : On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$

1. **a.** Montrer que f est définie et continue sur $[0;+\infty[$.

b. Montrer que f est C^1 sur $]0;+\infty[$.

2. **a.** Montrer que f est solution de (E) : $y' - y = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$

b. Déterminer la fonction f. *Rappel* : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Ex 173 : Soit F la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

1. Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer F'. On donne $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. Exprimer F.

Ex 174 : Soit (E) : $(x^2-4x)y' + (2-x)y = 4$.

1. Trouver une solution de (E) sous la forme d'un polynôme.

2. Résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$ et $]4, +\infty[$.

3. Trouver les solutions de (E) sur $]-\infty, 4[$, $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.

Ex 175 : On considère $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle ., . \rangle$, produit scalaire quelconque. Soit f un endomorphisme autoadjoint à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout $h \neq 0$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, $\langle f(h), h \rangle > 0$.

2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$.

- **a.** Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle.
- **b.** À l'aide des questions précédentes, montrer que g admet un point critique unique z_0 tel que $z_0 = f^{-1}(u)$.
- **c.** Montrer que g admet en z_0 un minimum global.

Ex 176 :

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y_m = \min(X, m)$, avec X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

- **a.** Déterminer G_X.
- **b.** En déduire $E(X)$ et $V(X)$ grâce à la question précédente.
- **c.** Déterminer la loi de Y_m et son espérance.

2. Montrer qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est sans mémoire :
$(\forall k, n \in \mathbb{N},\ P(X > n + k | X > n) = P(X > k))$ si et seulement si X suit une loi géométrique.

Ex 177 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = |X - Y|$.

1. Calculer $P(Z = 0)$.

2. Calculer $P(Z = n)$ pour tout entier naturel non nul n.

3. Calculer l'espérance de Z.

Ex 178 :
Pour tout n :

- Soit p_n appartenant à $]0, 1[$,
- soit X_n (respectivement Y_n) une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli (respectivement géométrique) de paramètre p_n,
- on suppose X_n et Y_n indépendantes.

On pose $U_n = X_n - Y_n$

1. Calculer l'espérance et la variance de Un

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(V(U_n))_n$ converge vers 0.

3. Montrer que pour tout $a > 0$, $\lim P\{|U_n - 1| > a\} = 0$.

Ex 179 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$ on donne $P(X = n) = \dfrac{p}{n} P(X = n - 1)$. Deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1+X_1}$.
3. Donner la loi de $U = X_1 + X_2$ puis celle de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$.
4. X_3 suit une loi de Poisson de paramètre λ_3 indépendantes de X_1 et X_2 ; on pose $V = X_2 + X_3$. Déterminer $l(U,V) = \dfrac{cov(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$.

Ex 180 : [Incomplet] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappelez l'espérance et la variance de X.
2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.
3. Calculer $P(X = Y)$.
4. Montrer que $P(X < Y) = P(Y < X)$.
5. Calculer $P(X \geqslant Y)$.

Ex 181 : On dispose d'une urne avec $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'obtention d'une boule différente de la toute première tirée, pour la première fois. On note Y_n la variable aléatoire correspondant au rang où pour la première fois toutes les boules ont été tirées au moins une fois.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Justifier que X_n admet une espérance finie et la calculer.
3. Calculer les lois de Y_2 et Y_3.
4. Calculer l'espérance de Y_n.

Ex 182 : On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire ces jetons avec remise et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage pour lequel on obtient pour la premiè re fois un jeton différent du premier tiré. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « le jeton k est tiré au premier tirage ».

1. Montrer que $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
2. Déterminer la loi de X.
3. Que peut-on dire de la loi de $Y = X - 1$?
4. Déterminer espérance et variance de X.

Ex 183 : Soient X, Y, Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

Ex 184 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, où p est dans $]0,1[$. On pose $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$.

Ex 185 : On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 qui suivent toutes les deux une loi géomtrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer les lois des variables : $Y = \min(X_1, X_2)$ et $S = X_1 + X_2$.
2. Reconnaître la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.