Correction des exercices du 18/12/2023 (Séries entières)

Ex 1 : Développer en série entière $x \mapsto \int_0^x \sin(t^2)dt$.

Correction : Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction sin est DSE sur $\mathbb{R}$, alors on a :
$\sin(t^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2k+1)!}$.
Ainsi le rayon de convergence de $t \mapsto \sin(t^2)$ vaut $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$, les fonctions $t \mapsto \frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2k+1)!}$ sont continues pour tout k de $\mathbb{N}$ et on a la convergence uniforme sur ce segment de la série de fonctions $t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2k+1)!}$ (ce segment est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sin(t^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2k+1)!}$).
Ainsi on peut intégrer terme à terme :
$\int_0^x \sin(t^2)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2k+1)!}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+3}}{(4k+3)(2k+1)!}$.

Ex 2 : Soit $(E) : x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions de (E) développables en série entière en précisant le rayon de convergence.
2. Exprimer ces solutions à l'aide de fonction élémentaires.

Correction :

1. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une éventuelle solution DSE et on suppose que son rayon de convergence R est strictement positif.

   Soit $x \in]-R, R[$. Comme on peut dériver terme à terme un série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on a :
   $0 = x^2(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}) + (x^2+x)(\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$
   $\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{n(n-1)}_{=0 \text{ si } n=1 \text{ ou } 0} a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n}_{=0 \text{ si } n=0} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$
   $\sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) + n - 1]a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n =$
   $-a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n^2-1)a_n + (n-1)a_{n-1}]x^n$.
   Par unicité du DSE, on a : $a_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n^2-1)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0$, puis :
   $\forall n \geq 2,\ (n-1)(n+1)a_n = -(n-1)a_{n-1}$, ce qui donne : $\forall n \geq 2,\ a_n = -\frac{1}{n+1}a_{n-1}$.
   On montre ainsi par récurrence que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \times n \times (n-1) \times ... \times 3}a_1 = \frac{2(-1)^{n-1}}{(n+1)!}a_1 = \lambda \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ainsi les fonctions solutions DSE sont de la forme $x \mapsto \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^n$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Verifions que les calculs précédents étaient licites en regardant le rayon de convergence de cette dernière série entière.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $\frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^n\right|} = \frac{|x|}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 < 1$. Grâce à la règle de D'Alembert pour les séries à termes positifs, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^n$ converge absolument. Ainsi le rayon de convergence R vaut $+\infty$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} x^p = \frac{1}{x}(e^{-x} - 1 + x)$.

Ainsi les soltuions DSE de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par la formule :

$x \mapsto \begin{cases} \lambda \dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x} & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.