Correction des exercices du 08/01/2024 (Probabilité)

Ex 1 : On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note P_n l'événement « on obtient pile au n-ème lancer » et F_n l'événement « on obtient face au n-ème lancer ».
On s'intéresse au rang d'apparition de la séquence PPF (le rang est le rang du face).On pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ si $n \geq 3$, puis $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$ et $u_n = P(U_n)$, avec $u_1 = u_2 = 0$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone, et en déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.
2. Calculer $P(B_n)$. Montrer que B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux ncompatibles. Calculer u_3, u_4 et u_5.
3. Montrer que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Exprimer $P(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de u_{n-2}.
4. Montrer que : $\forall n \geq 3,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$. Calculer ℓ.
5. Déterminer la probabilité de ne jamais avoir la séquence PPF et commenter.

Correction :

1. Comme $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k \subset \bigcup_{k=3}^{n+1} B_k = U_{n+1}$, puis $P(U_n) \leq P(U_{n+1})$. Ainsi (u_n) est croissante.
   Comme une probabilité est majorée par 1, alors (u_n) est majorée par 1. Ainsi (u_n) converge.
2. Par indépendance des lancers, on a : $P(B_n) = P(P_{n-2}).P(P_{n-1}).P(F_n) = (1/2)^2 = 1/8$.
   Montrer que B_n et B_{n+1} sont incompatibles car au n-ème lancer, on aurait Pile et Face. De même B_{n+1} et B_{n+2} sont incompatibles.
   Enfin B_{n+2} et B_n sont incompatibles car au n-ème lancer, on aurait Pile et Face.
   On a $u_3 = P(B_3) = 1/8$.
   On a par réunion disjointe : $u_4 = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = 1/8 + 1/8 = 1/4$.
   De même : $u_5 = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$.
3. On a : $U_n \cap B_{n+1} = \bigcup_{k=3}^{n} (B_k = B_{n+1}) = \bigcup_{k=3}^{n-2} (B_k = B_{n+1}) \bigcup (\underbrace{B_{n-1} \cap B_{n+1}}_{=\emptyset}) \bigcup (\underbrace{B_n \cap B_{n+1}}_{=\emptyset}) = \bigcup_{k=3}^{n-2} (B_k = B_{n+1}) = U_{n-2} \cap B_{n+1}$.
   On a donc : $P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2}).P(B_{n+1}) = \dfrac{1}{8}.u_{n-2}$, car U_{n-2} et B_{n+2} sont indépendants (U_{n-2} concerne les lancers 1 à $n-2$ et B_{n+1} s'intéresse aux lancers $n-1, n, n+1$).
4. Soit $n \geq 3$. On a : $u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8} u_{n-2} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
   Qaund on passe à la limite dans cette relation : $\ell = \ell + \dfrac{1}{8}(1 - \ell)$, donc : $\ell = 1$.
5. (U_n) est une suite croissante d'événements, donc $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n) = \lim_{n\to+\infty} P(U_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   L'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n$ traduit le fait que la séquence PPF apparaît.
   La probabilité de ne jamais avoir la séquence PPF vaut 0, donc presque sûrement la séquence PPF apparaît.

<u>Ex 2</u> : On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $p \in]0,1[$.
On note X (respectivement Y), le rang du premier (respectivement du second) succès.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$ avec $j \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.
2. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y - i$ sachant $(X = i)$.

Correction :

1. Si on a l'événement $(Y = j)$, alors X est à valeurs dans $[\![1, j-1]\!]$.

   Soit $k \in [\![1, j-1]\!]$. On a :
   $P(X = k | Y = j) = \dfrac{P((X = k) \cap (Y = j)}{P(Y = j)} = \dfrac{P((X = k) \cap (Y = j))}{\sum_{l=1}^{+\infty} P((X = l) \cap (Y = j))} = \dfrac{P((X = k) \cap (Y = j))}{\sum_{l=1}^{j-1} P((X = l) \cap (Y = j))}$,
   car $(X = l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements et X est avant Y.
   $(X = k) \cap (Y = j)$ est constitué de $j - 2$ échecs et 2 succès (aux temps j et k).
   Par indépendance des lancers, on a : $P((X = k) \cap (Y = j)) = (1-p)^{j-2}p^2$.
   On a donc : $P(X = k | Y = j) = \dfrac{(1-p)^{j-2}p^2}{\sum_{l=1}^{j-1}(1-p)^{j-2}p^2} = \dfrac{1}{\sum_{l=1}^{j-1} 1} = \dfrac{1}{j-1}$.
   On a donc une loi $\mathcal{U}([\![1, j-1]\!])$.
2. $Y - i$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
   X suit une loi $\mathcal{G}(p)$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $P(Y - i = k | X = i) = P(Y = i + k | X = i) = \dfrac{P((X = i) \cap (Y = i + k)}{P(X = i)} =$
   $\dfrac{(1-p)^{i+k-2}p^2}{(1-p)^{i-1}p} = (1-p)^{k-1}p$, grâce au calcul de la question précédente.
   On a donc une loi $\mathcal{G}(p)$.