1-Intégration

Ex 1 : Étudier la convergence des intégrales suivantes puis les calculer.

1. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arcsin}\,(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$;

2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{t}}$;

3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x-x^3}$;

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$;

5. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,\mathrm{d}t$;

6. (*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x\rfloor}}{x}dx$;

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$;

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\sin t\,\mathrm{d}t$;

9. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}$;

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\,t}$;

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+2\sin x+3}$;

12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t}}$;

13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$;

14. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(2-t^2)\sqrt{1-t^2}}$;

15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{Arctan}\,(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$; (poser $y=1/t$)

16. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ (poser $t=\mathrm{ch}\,(u)$) ;

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+it)}$;

18. $\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n dt$.

Ex 2 : Étudier si les intégrales impropres suivantes convergent.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$;

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t+t^2e^{-t}}$;

3. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(\ln(t))}$;

4. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$;

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}\,(2t)-\mathrm{ch}\,(t)}{\ln(1+t\sqrt{t})\sin(t)}\,\mathrm{d}t$;

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos(t)}dt$;

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t$;

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{t})\ln t}{\sqrt{t}+\sin t}\,\mathrm{d}t$;

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(|t^2-t|)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;

12. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)^{\ln(t)}}$;

13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t^2+t}-t\right)\mathrm{d}t$;

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t})^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;

15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^4+t+1)\,\mathrm{d}t$;

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$;

17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t-t^2}\,\mathrm{d}t$;

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$;

19. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;

20. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^t)}{t}\,\mathrm{d}t$;

21. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln(t))}$.

Ex 3 : Soit $f\in\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe (x_0 est un point fixe de f si $f(x_0)=x_0$).

Ex 4 : (*) Déterminer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

Ex 5 : ***1.*** Montrer que $\displaystyle f(x)=\int_0^\pi \ln(x^2-2x\cos(t)+1)dt$ est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. Décomposer $X^{2n}-1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.

3. En utilisant une somme de Riemann, calculer $f(x)$, pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Ex 6 : Étudier si les intégrales impropres suivantes convergent en fonction des paramètres.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \alpha \in \mathbb{R}\,;$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^b}\,\mathrm{d}x,\ \ a,b \in \mathbb{R}\,;$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b},\ \ a,b \in \mathbb{R}\,;$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \alpha \in \mathbb{R}\,;$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}} - 1\right)\,\mathrm{d}t,\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*\,;$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t,\ (n,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}\,;$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x+e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R}$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t,\ \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,;$

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta - 1}\,\mathrm{d}t,\ \ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\,;$

10. $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{t}\left(-\ln(t)\right)^\beta\,\mathrm{d}t,\ \ \beta \in \mathbb{R}\,;$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\sin(\pi t)}{t^\alpha(1-t)^\beta}\,\mathrm{d}t\,;$

12. (*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\ln\left(\mathrm{sh}\,(t^\alpha)\right) - 2\,\mathrm{sh}\,\left(\ln\left(1+t^\alpha\right)\right)\right)\,\mathrm{d}t,$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex 7 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(1)=0$.

1. Relier les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)f'(t)cotan(\pi t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)(1+cotan^2(\pi t))dt$ (on jusitifiera l'existence des différentes intégrales).

2. Majorer $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)(1+cotan^2(\pi t))dt$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2dt$ et $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)cotan^2(\pi t)dt$.

3. En déduire que $K\displaystyle\int_0^1 f^2 \leq \int_0^1 (f')^2$, avec K une constante à préciser.

Ex 8 : *1.* Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{Arctan}\,(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t\,\mathrm{Arctan}\,(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer F'.

3. Calculer I.

Ex 9 : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On pose $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Ex 10 : Soient $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, $f \in E$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \inf(x,t)\,f(t)dt$. définie sur $[0\,;1]$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour x dans $[0,1]$.

Ex 11 : (*) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $x \mapsto f\left(\left|x - \dfrac{a^2}{x}\right|\right)$ est encore intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

Ex 12 : (*) Soient f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et F sa primitive s'annulant en 0. Comparer les natures de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\mathrm{ch}\,(t)}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)\,\mathrm{sh}\,(t)}{(\,\mathrm{ch}\,(t))^2}\,\mathrm{d}t$ et, le cas échéant, leurs valeurs.

Ex 13 : Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$ et ayant pour limite ℓ en $-\infty$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; pour $u \in \mathbb{R}$, on pose $I(u) = \displaystyle\int_u^{+\infty} \big[f(a+x) - f(b+x)\big]\, dx$.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $I(u)$ est bien définie et vaut $\displaystyle\int_{a+u}^{b+u} f(t)\, dt$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{u \to -\infty} I(u)$ si l'on suppose $\ell = 0$, et en déduire $\displaystyle\lim_{u \to -\infty} I(u)$ dans le cas ℓ quelconque.

Ex 14 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, \mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n, J et K.

2. Montrer que $I_1 = J$, puis calculer $I_1 + J$ à l'aide du changement de variable $t = e^u$ (on montrera aussi que $\mathrm{ch}\,(2x) = 1 + \mathrm{sh}^2(x)$). Trouver I_1.

3. ***a.*** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

b. Trouver la limite de (I_n).

Ex 15 : Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^{2p+1}(t)}$.

1. Justifier l'existence de I_p et calculer I_0.

2. Trouver une relation entre I_{p+1} et I_p, puis en déduire I_p.

Ex 16 : Soit $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\,(t))^n dt$.

1. Résoudre l'équation $\mathrm{sh}\,(x) = 1$.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

4. À l'aide d'un encadrement, déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Ex 17 : (*) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si ff' admet une limite (éventuellement infinie) non nulle en $+\infty$, alors $\displaystyle\lim_{+\infty} f^2 = +\infty$.

2. On suppose que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f')^2$ l'est aussi et que l'on a : $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \cdot \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right)$.

3. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

Ex 18 : *1.* Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ définie sur $]0, \pi]$, se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\, \mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n. Calculer $I_{n+1} - I_n$ puis I_n.

3. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x)\, \mathrm{d}x = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente, et donner sa valeur.

Ex 19 : (**) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha$, avec α dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$. Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\gamma f(x)$, pour $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$?

2. Si $\alpha < -1$, montrer que : $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ et que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} f \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

3. Pour $m > 0$, trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(mx)}{f(x)}$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx$ converge.

Ex 20 : (*) Soit $f : x \mapsto e^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Étudier la monotonie de f.

2. Déterminer la limite et un équivalent de f en chacune des bornes de son domaine de définition.

Ex 21 : *1.* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)du$ converge.

2. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \underset{x\to0^+}{=} -\ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)du + o(1)$.

Ex 22 : (*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n\, dt$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale D_n converge.

2. Montrer que $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$, puis en déduire D_1.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}du$.

4. En déduire que $D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$.

Ex 23 : (*) *1.* Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos(t)-\cos(x)}dt$, avec $x \in \mathbb{R}$.
2. Trouver une relation de récurrence d'ordre deux vérifiée par (I_n).
3. Calculer I_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 24 : *1.* Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\, dt$.
*2.*Déterminer les variations de f sur $\mathcal{D}$.
3. Soit $x \in \mathcal{D}$. Calculer $f(x) + f(x+1)$.
4. Déterminer les limites et un équivalent de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

Ex 25 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2dx \leq 4\int_0^1 x^2(f'(x))^2dx$.
Déterminer le cas d'égalité.