Correction des exercices du 15/01/2024 (Variables aléatoires)

Ex 1 : Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit U et T des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs respectivement dans $\mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et $\mathbb{Z}$, avec :

$$\forall (n,t) \in (\mathbb{N} \setminus \{0;1\}) \times \mathbb{Z},\ P((U,T)=(n,t)) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leq n-2 \text{ et } n \text{ et } |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{t=-n+2 \\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}^{n-2} p^2 q^{n-2} \right) = 1.$

2. Déterminer la loi de U.

3. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{Z},\ P(T=t) = \dfrac{pq^{|t|}}{1+q}$.

4. Déterminer l'espérance de T.

5. Quelle est la loi de T sachant $(U=n)$, pour $n \geq 2$.

6. ***a.*** Montrer l'existence de $E(U)$ et $E(UT)$.

b. Calculer $cov(U,T)$. U et T sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. Dans $\displaystyle\sum_{\substack{t=-n+2 \\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}^{n-2} p^2 q^{n-2}$, le terme $p^2 q^{n-2}$ est constant. Il faut donc compter le nombre de termes dans cette somme. Les t convenables sont de la forme $t = -n+2k$, avec $1 \leq k \leq n-1$. On a donc $n-1$ termes dans la somme, donc :

$$\sum_{\substack{t=-n+2 \\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}^{n-2} p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2}.$$

On doit calculer maintenant $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)p^2 q^{n-2} = p \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = p \times \frac{1}{p}$, car dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$ on aura reconnu l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

2. Comme U est la première loi marginale, on a : $\forall n \geq 2,\ P(U=n) = \displaystyle\sum_{t \in \mathbb{Z}} P((U,T)=(n,t)) =$

$$\sum_{\substack{t=-n+2 \\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}^{n-2} p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2},$$ grâce à la question précédente.

3. Soit $t \in \mathbb{Z}$. On a $P(T=t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P((U,T)=(n,t)) = \sum_{\substack{n=|t|+2 \\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}^{+\infty} p^2 q^{n-2} = p^2 \sum_{\substack{m=|t| \\ m \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}^{+\infty} q^m =$

$$p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^{|t|+2j} = p^2 q^{|t|} \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = \frac{p^2 q^{|t|}}{1-q^2} = \frac{p^2 q^{|t|}}{(1-q)(1+q)} = \frac{pq^{|t|}}{1+q}.$$

4. Comme $t^3 q^t = t^3 e^{t\ln(q)} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ par croissance comparée, donc $tq^t \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_{t \geq 0} tq^t$ converge et donc $\displaystyle\sum_{t \in \mathbb{Z}} |t| q^{|t|}$ converge et donc T admet une espérance.

On a $E(T) = 0.\dfrac{p}{1+q} + \displaystyle\sum_{t=-\infty}^{-1} t\dfrac{pq^{|t|}}{1+q} + \sum_{t=1}^{+\infty} t\dfrac{pq^{|t|}}{1+q} = \sum_{t=1}^{+\infty}(-t)\dfrac{pq^{|-t|}}{1+q} + \sum_{t=1}^{+\infty} t\dfrac{pq^{t}}{1+q} =$
$-\displaystyle\sum_{t=1}^{+\infty} t\dfrac{pq^{t}}{1+q} + \sum_{t=1}^{+\infty} t\dfrac{pq^{t}}{1+q} = 0.$

5. Soit $t \in \mathbb{Z}$, on a : $P(T = t|U = n) = \dfrac{P(T = t, U = n)}{P(U = n)} =$

$$\begin{cases} \dfrac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}} = \dfrac{1}{n-1} & \text{si } |t| \leq n-2 \text{ et } n \text{ et } |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi la loi de T sachant $(U = n)$ est uniforme sur $\{-n+2k,\ 1 \leq k \leq n-1\}$.

6. ***a.*** Pour l'existence de $E(UT)$ et $E(U)$, montrons que T^2 et U^2 admettent une espérance.

Il faut doncétudier la convergence de $\displaystyle\sum_{t\in\mathbb{Z}} t^2\dfrac{pq^{|t|}}{1+q}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n^2p^2q^{n-2}$.

Comme $t^4q^t = t^4e^{t\ln(q)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissance comparée, donc $t^2q^t = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_{t\geq 0} t^2q^t$ converge et donc $\displaystyle\sum_{t\in\mathbb{Z}} t^1q^{|t|}$ converge, puis T^2 admet une espérance.

Pour les mêmes raisons, on montre que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n^2q^n$ converge et donc U^2 admet une espérance.

Ainsi UT admet une espérance, tout comme U.

b. $E(U) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nP(U = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^2q^{n-2} = \sum_{m=1}^{+\infty}(m+1)mp^2q^{m-1} = p\sum_{m=1}^{+\infty}(m+1)mpq^{m-1} = pE(Z(Z+1))$, avec Z qui suit une loi $\mathcal{G}(p)$.

On a :
$E(Z(Z+1)) = E(Z^2) + E(Z) = V(Z) + (E(Z))^2 + E(Z) = \dfrac{q}{p^2} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{q+1+p}{p^2} = \dfrac{2}{p^2}.$

Ainsi $E(U) = \dfrac{2}{p}$.

Par la formule de transfert, on a $E(UT) = \displaystyle\sum_{(n,t)\in(\mathbb{N}\setminus\{0;1\})\times\mathbb{Z}} ntP((U,T) = (n,t))$, la famille $(ntP((U,T) = (n,t)))_{(n,t)\in(\mathbb{N}\setminus\{0;1\})\times\mathbb{Z}}$ étant sommable grâce à la question précédente. On peut donc utiliser le théroème de Fubini :

$$E(UT) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\sum_{\substack{t=-n+2 \\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}^{n-2} tp^2q^{n-2}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} np^2q^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}(-n+2k) =$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} np^2q^{n-2}\left[-n(n-1) + 2\frac{(n-1)n}{2}\right] = 0.$$

Ainsi $cov(U,T) = E(UT) - E(U)E(T) = 0$.

On a $P((U = 2) \cap (T = 1)) = 0$, car on n'a pas : $|1| \leq 2-2$.

Mais $P(U = 2) = p^2$ et $P(T = 1) = \dfrac{pq}{1+q}$, donc $P(U = 2)P(T = 1) \neq 0 = P((U = 2) \cap (T = 1))$.

Ainsi T et U ne sont pas indépendantes.

<u>**Ex 2**</u> : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$, avec $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Correction : On a $P(Z = 0) = P(X = Y) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = k) \cap (Y = k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k)$, par union disjointe et indépendance de X et Y.

On a donc $P(Z = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 q^{2k} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q}$, car $|q^2| < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(Z = n) = (|X - Y| = n) = (\underbrace{X - Y = n}_{X>Y}) \cup (\underbrace{Y - X = n}_{Y>X})$. Comme on a une union disjointe, alors :

$P(Z = n) = P(X-Y = n)+P(Y-X = n) = P(X = Y+n)+P(Y = X+n) = P\left(\bigcup_{l=0}^{+\infty} (X = l+n) \cap (Y = l)\right) + P\left(\bigcup_{l=0}^{+\infty} (Y = l+n) \cap (X = l)\right) = \sum_{l=0}^{+\infty} P(X = l+n)P(Y = l) + \sum_{l=0}^{+\infty} P(Y = l+n)P(X = l) = 2\sum_{l=0}^{+\infty} p^2 q^{2l+n} = 2p^2 q^n \sum_{l=0}^{+\infty} q^{2l} = 2\frac{p^2 q^n}{1-q^2} = \frac{2pq^n}{1+q}$, toujours en tulisant l'union disjointe et l'indépendance.