Correction des exercices du 22/01/2024 (Intégrales à paramètres)

<u>Ex 1</u> : Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}dt$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminer un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Calculer $f(x) - f'(x)$, puis donner un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Si x est dans $\mathbb{R}_+$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. Ainsi $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Si x est dans $\mathbb{R}_-^*$, alors par croissance comparée $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{t^2} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2} = +\infty$, car $\dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-t^2x}}{t^2}$. Ainsi il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t \in [A, +\infty[,\ \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2} \geq 1$, ce qui prouve la non-intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$ sur $[0, +\infty[$.

On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$.

2. On pose $g : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable (grâce à la première question) sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t^2e^{-t^2x}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-t^2x}}{1+t^2} \leq t^2e^{-t^2x} \leq t^2e^{-at^2} = \varphi(t).$$

  La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (t^2)^2e^{-at^2} = 0$, par croissance comparée, donc $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Grâce à la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t^2x}}{1+t^2}dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Grâce au changement de variable $u = \sqrt{x}t$, on a :

$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\frac{u^2}{x}e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{x}}du = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{x}}du.$

Nous allons passer à la limite dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{x}}du$ quand x tend vers $+\infty$. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominé à paramètre continu.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $h_x : u \mapsto \dfrac{u^2e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $u \in \mathbb{R}_+$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h_x(u) = u^2e^{-u^2}$ et $u \mapsto u^2e^{-u^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- On a : $\forall (x,u) \in\in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+,\ |h_x(u)| \leq u^2e^{-u^2}$. Nous avons vu dans la question précédente qu'une fonction du type $u \mapsto u^2e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Grâce au théorème de convergence dominé à paramètre continu,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^2e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{x}}du = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_x(u)du = \int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}du.$

On a : $\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}du = \left[-u \times \frac{e^{-u^2}}{2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$. Ceci est licite, car le crochet est bien défini et vaut 0 (car $\lim\limits_{u\to+\infty} ue^{-u^2} = \lim\limits_{u\to+\infty} (u^2)^{1/2}e^{-u^2} = 0$, par croissance comparée).

Grâce au rappel de l'énoncé : $\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Ainsi $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)e^{-t^2x}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2x}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{x}}$, en posant le changement de variable $u = \sqrt{x}t$. Grâce au rappel, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x)-f'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

Grâce à la question précédente, comme $f'(x) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$, alors :
$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + f'(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$