Correction des exercices du 29/01/2024 (Espaces euclidiens sup)

Ex 1 : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$. Préciser les cas d'égalité.

Correction : Pour $Y = (y_1, ..., y_n)$ et $Z = (z_1, ..., z_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} y_k x_k\right)^2 = (Y|Z)^2 \leq \|Y\|^2.\|Z\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)$.

On a égalité si et seulement si (Y, Z) est liée.

En prenant $Y = (\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})$ et $Z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \dfrac{1}{\sqrt{x_1}}\right)$, on a : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$ et donc on a bien : $\displaystyle n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$, car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

On a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Y = \lambda Z$ (car $Z \neq 0$), soit : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sqrt{x_i} = \lambda \dfrac{1}{\sqrt{x_i}}$, soit : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \lambda$. La condition $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, donne $n\lambda = 1$, soit $\lambda = \dfrac{1}{n}$. La réciproque étant claire, on a égalité si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \dfrac{1}{n}$.

Ex 2 : Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\ln t - at - b)^2 dt$.

Correction :

On note $\mathcal{L}^2(]0, 1]) = \{f \in \mathcal{C}(]0, 1], \mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f^2 < +\infty\}$.

On définit sur $\mathcal{L}^2(]0, 1])$ le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 fg$, avec $f, g \in \mathcal{L}^2(]0, 1])$.

Ceci produit scalaire existe bien, car $|fg| \leq \dfrac{1}{2}(f^2 + g^2)$, et ensuite on a bien toutes les propriétés du produit scalaire.

Ainsi pour $f \in \mathcal{L}^2(]0, 1])$, on a $\|f\|^2 = \displaystyle\int_0^1 f^2$.

On pose $g : t \mapsto 1$ et $h : t \mapsto t$ et $F = vect(g, h)$.

On constate que ln est bien dans $\mathcal{L}^2(]0, 1])$, car $\ln^2(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

On doit donc déterminer $m = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\ln - ag - bh\|^2 = \inf_{f\in F} \|\ln - f\|^2 = (d(\ln, F))^2$.

Déterminons une base orthonormée de F.

- On a $\|g\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 1^2 dt} = 1$, puis on pose $u_1 = \dfrac{g}{\|g\|} = 1$.
- On pose $v_2 = h - (h|u_1)u_1 = h - \displaystyle\int_0^1 t dt = h - \frac{1}{2}$.

On a $\|v_2\|^2 = (v_2|v_2) = (v_2|h - (h|u_1)u_1) = (v_2|h)$, car v_2 et u_1 sont orthogonaux.

On a ainsi $\|v_2\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) t dt = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{1}{2}t\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Ainsi $\|v_2\| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

On pose $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = t \mapsto 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}$.

Ainsi (u_1, u_2) est une base orthonormée de F.
Soit k la projection orthogonale de ln sur F.
Grâce au théorème de Pythagore, on a : $\| \ln \|^2 = \|k\|^2 + \| \ln - k\|^2$, car $\ln - k$ est dans $F^{\perp}$.
Ainsi $m = d(\ln, F)^2 = \| \ln - k\|^2 = \| \ln \|^2 - \|k\|^2 = \| \ln \|^2 - (\ln | u_1)^2 - (\ln | u_2)^2$, car (u_1, u_2) est une base orthonormée de F.
On a : $\| \ln \|^2 = \int_0^1 \ln^2(t)dt = \int_0^1 1 \times \ln^2(t)dt = [t \ln^2(t)]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{2}{t} \ln(t)dt = -2 \int_0^1 \ln(t)dt = -2[t \ln(t) - t]_0^1$, les crochets étant bien définis, car $\lim_{t \to 0^+} t \ln(t) = \lim_{t \to 0^+} t \ln^2(t) = 0$, par croissance comparée. Ainsi $\| \ln \|^2 = 2$.
On a : $(\ln | u_1) = \int_0^1 \ln(t)dt = -1$, pour le même calcul que précédemment.

On a : $(\ln | u_2) = 2\sqrt{3} \int_0^1 t \ln(t)dt - \sqrt{3} \int_0^1 \ln(t)dt = 2\sqrt{3} \left(\underbrace{\left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 t dt}_{=1/2} \right) + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi $m = 2 - 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Ex 3 : Nous voulons démontrer qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication pour $n \geq 3$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(U, V) \mapsto tr(U^T V)$.
Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit.
Soit A un élément non nul de l'orthogonal de H.

1. Justifier que pour tout $B \in H$, BA^T est colinéaire à A^T.

2. Montrer que la matrice A^T n'est pas inversible.

3. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par : $W = Im(A^T)$. Montrer que W est stable pour tous les éléments de H.

4. Soient : p le rang de la matrice A^T, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $Im(A^T)$, complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}_1$. Montrer que l'application $\varphi_P : M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. En déduire que l'on a : $\dim(H) \leq n^2 - p(n-p)$, puis conclure.

Correction :

1. On note $H^\perp$ l'orthogonal de H pour le produit scalaire de l'énoncé $(\cdot|\cdot)$.
A est une matrice non nulle de l'orthogonal de H : $A \in H^\perp$.
Montrons tout d'abord que $H^\perp = \text{Vect}(A)$.
D'après le cours, $H^\perp$ est un supplémentaire de H, or H est un hyperplan de E_n donc son orthogonal est de dimension 1. Puisque $A \in H^\perp$ avec $A \neq 0$, on en déduit que (A) est une base de $H^\perp$, donc on a $\boxed{H^\perp = \text{Vect}(A).}$
On fixe maintenant $B \in H$ quelconque. Soit $C \in H$. Puisque H est stable pour la multiplication des matrices, la matrice CB est encore dans H.
Or $A \in H^\perp$ donc le produit scalaire suivant est nul :

$$0 = (A|CB) = \text{Tr}(A^T CB) = \text{Tr}(BA^T C) = \text{Tr}\left(\left(AB^T\right)^T C\right) = (AB^T|C).$$

On vient de montrer que $\forall C \in H, (AB^T|C) = 0$, autrement dit $AB^T \in H^\perp = \text{Vect}(A)$.
Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, AB^T = \lambda A$. En transposant, il vient : $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad BA^T = \lambda A^T.}$
En d'autres termes, $\boxed{\text{pour tout } B \in H,\ BA^T \text{ est colinéaire à } A^T.}$

2. Si pour tout B de H, on a : $B \in \text{Vect}(I_n)$, alors on aurait $H \subset \text{Vect}(I_n)$, puis $\dim(H) \leq 1$. Or $\dim(H) = n^2 - 1 > 1$, donc il existe B H non colinéaire à I_n. Grâce à la question précédente pour ce B, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA^T = \lambda A^T$. On a donc : $(B - \lambda I_n)A^T = 0$ et $B - \lambda I_n \neq 0$. Si A est inversible, alors par multiplication par $(A^Y)^{-1}$, on a : $B - \lambda I_n = 0$, on aboutit à une contradiction donc $\boxed{A^T \text{ n'est pas inversible.}}$

3. Soit $B \in H$. Montrons que W est stable par B.
Soit $X \in W = \text{Im}\,(A^T)$. Alors il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = A^T Y$.
De plus, d'après la question **1.**, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $BA^T = \lambda A^T$. Il vient

$$BX = B(A^T Y) = (BA^T)Y = \lambda A^T Y = \lambda X \in \text{Vect}(X) \subset W.$$

Ainsi $\forall X \in W, BX \in W$, donc W est stable par B.
Finalement, on a montré que $\boxed{W \text{ est stable pour tous les éléments de } H.}$

4. P est une matrice de passage donc est bien inversible.
L'application $\varphi_P : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$ est clairement linéaire car la multiplication matricielle à gauche ou à droite est linéaire, donc φ_P est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que cet endomorphisme est bijectif.
Pour cela on remarque par exemple que $\varphi_{P^{-1}} : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} \right.$ vérifie :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P(M) = \varphi_{P^{-1}}(P^{-1}MP) = P(P^{-1}MP)P^{-1} = M = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M),$$

donc $\varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, ce qui prouve que φ_P est bijective et que sa bijection réciproque est $\varphi_{P^{-1}}$.
Donc $\boxed{\varphi_P : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right. \text{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

5. D'après les notations de l'énoncé, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $W = \mathrm{Im}\,(A^T)$, que l'on a complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}_1$.
En particulier, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ de l'endomorphisme $X \mapsto MX$ canoniquement associé à la matrice M.
Soit $B \in H$. On a montré que W est stable pour tous les éléments de H, donc W est stable par B. Par suite, $\forall i \in [|1, p|]$, puisque $e_i \in W$, on en déduit que $Be_i \in W = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Autrement dit, la matrice $P^{-1}BP$ dans $\mathcal{B}_1$ de l'endomorphisme canoniquement associé à B est de la forme :

$$P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right) \qquad \text{avec} \qquad A_1 \in M_p(\mathbb{R}), A_2 \in M_{p,n-p}(\mathbb{R}), A_3 \in M_{n-p}(\mathbb{R}).$$

Remarquons que le nombre de coefficients nuls dans la matrice ci-dessus vaut $p(n-p)$.
On a donc montré que l'ensemble des $P^{-1}BP$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $E_{i,j}$ suivants :

$$\varphi_P(H) = \{\varphi_P(B), B \in H\} = \{P^{-1}BP, B \in H\} \subset \mathrm{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2 \setminus [|n-p+1, n|] \times [|1,p|]).$$

D'après la question **4.**, φ_P est un automorphisme de E_n, d'où

$$\dim(H) = \dim(\varphi_P(H)) \leq \dim \mathrm{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2 \setminus [|n-p+1, n|] \times [|1,p|]) = n^2 - p(n-p).$$

Finalement $\boxed{\dim(H) \leq n^2 - p(n-p).}$

On a montré que :

$$\dim(H) = n^2 - 1 \leq n^2 - p(n-p), \qquad \text{donc} \qquad p(n-p) \leq 1.$$

Or $p(n-p) \in \mathbb{N}$ donc $p(n-p)$ vaut 0 ou 1.
Supposons que $p(n-p) = 0$, alors on a soit $p = 0$, soit $n - p = 0$.
Si $p = 0$, alors $A^T = 0$ donc $A = 0$ ce qui est exclu.
Si $n - p = 0$, alors $p = n \leq n - 1$, ce qui est absurde. En effet A^T n'est pas inversible d'après la question **2**, donc $p = \mathrm{rg}\,(A^T) \leq n - 1$.
Par suite $p(n-p) \neq 0$ donc $p(n-p) = 1$. On en déduit que $p = 1$ et $n - p = 1$ soit $n = p + 1 = 2$.
$\boxed{\text{On a démontré que } n = 2.}$
Ainsi H n'existe pas, car on a supposé $n \geq 3$.