Ex 1 : (E3A PSI 2000 épreuve 2)
n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0, et soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Pour $n \geq 1$, on pose : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. On suppose que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est bornée et on note M un majorant de la suite $(|V_n|)_{n\geq 1}$. Pour $n \geq 1$, on pose : $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k$.

a. Montrer que pour $n \geq 1$ et pour p entier naturel, $p \geq 2$, on a :

$$T_{n+p} - T_n = \varepsilon_{n+p}V_{n+p} - \varepsilon_{n+1}V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k\left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}\right)$$

b. Etablir que pour $n \geq 2$ et pour p entier naturel on a : $|T_{n+p} - T_n| \leq 2M\varepsilon_{n+1}$.

c. En déduire que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge.

2. Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0 .

Pour x réel et $n \geq 1$, on pose : $U_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx$.

a. Soit λ un élément de $]0, \pi[$ et $I_\lambda = [\lambda, 2\pi - \lambda]$.

i) Etablir que pour tout x de $]0, 2\pi[$: $|U_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin(x/2)}$.

ii) Déduire de 1° que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$ et qu'elle converge uniformément sur I_λ.

b. On suppose, dans cette question, que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

i) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right] = 0$.

ii) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(nc_{2n}) = 0$. Montrer alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(nc_n) = 0$.

3. Pour x réel et $n \geq 1$, on pose : $\sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$.

a. établir pour tout x réel, l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ et pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x$.

b. Soit x un élément de $]0, \pi[$ fixé et N l'entier naturel vérifiant : $Nx \leq \pi < (N+1)x$. Montrer que : $0 \leq \sigma_N(x) \leq \pi$. Utiliser le résultat démontré en 1°b) pour justifier que, si $n > N$, on a :

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq 2$$

c. établir que pour tout x de $[0, 2\pi]$ et pour $n \geq 1$: $|\sigma_n(x)| \leq \pi + 2$.

d. On suppose de plus dans cette question que la suite $(nc_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers 0 . Prouver que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

4. On note ln la fonction logarithme népérien. On considère le cas particulier où $c_1 = 2$ et pour $n \geq 2, c_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

a. Montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa limite.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} S(x)\sin(nx)dx$.

Ex 2 : (E3A PSI 1999 épreuve 2 NC)

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes en l'indéterminée X à coefficients complexes, on considère un élément P de degré au moins égal à 1.
On note P' le polynôme dérivé de P et R le reste de la division euclidienne de P par P'.
Démontrer que les racines multiples de P sont les racines communes à P' et R.

2. On prend $P = X^3 + pX + q$ où p et q sont des complexes donnés.

a. Déterminer l'ensemble (Γ) des racines communes à P' et R.

b. En déduire que P admet exactement deux racines distinctes si et seulement si :

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \text{ et } pq\neq 0.$$

Préciser alors ces racines.
Que peut-on dire de ces racines si p et q sont réels ?

Ex 3 : (E3A PC 2000 épreuve 2) On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes nuls ou dont le degré est inférieur ou égal à k. Le coefficient binômial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ sera noté $\dbinom{n}{k}$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ dans toute la suite.

1. **a.** Montrer l'existence de f_n et g_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, tels que : $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$, ceci par développement de $((1-X)+X)^{2n-1}$, ou autrement [NB : on ne demande pas de calculer leurs coefficients].

b. Préciser les polynômes f_1, f_2 et f_3.

2. Déterminer en fonction de f_n et de g_n tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$. Démontrer l'unicité de f_n et de g_n.

3. **a.** Montrer que $f_n(1-X) = g_n(X)$.

b. Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. **a.** Dans tout ce qui suit, x désigne une variable réelle. Pour x tendant vers 0, démontrer la formule asymptotique suivante : $f_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$.

b. En déduire les coefficients du polynôme f_n.

c. L'équation $f_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

5. **a.** établir, pour tout x réel, la relation $nf_n(x) - (1-x)f_n'(x) = n\dbinom{2n-1}{n}x^{n-1}$.

b. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ ne peut pas avoir deux racines réelles strictement négatives.

6. Pour tout x réel, on pose : $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}dt$. Suivant la parité de n, donner le tableau des variations de la fonction h_n.

7. **a.** Démontrer que, pour tout $x\neq 1$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1 - n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}$.

b. Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $f_n(1)$ trouvée plus haut ?

8. Discuter selon n le nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

9. Prouver que les racines de $f_n(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, sont de modules strictement inférieurs à 1.

Ex 4 : (E3A PC 1999 épreuve 1) Calculer la dimension et donner une base de $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_{-1}^{1} P = 0\}$.

Ex 5 : (E3A MP 2000 épreuve 2)

1. ***a.*** Quel est le domaine de définition de $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt$.

b. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. DSE de $x \mapsto \dfrac{t^x}{(1+t)^2}$.

2. ***a.*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^n dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n!}{4} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^n}{(1+t)^2} dt \leq n!$.

3. ***a.*** Établir une relation simple entre $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(t))^n}{(1+t)^2} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{(1+t)^2} dt$.

b. Montrer que la fonction f est DSE et préciser son rayon de convergence.

4. On pose dans cette question $x = \dfrac{1}{2p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et l'on veut calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt$.

On rappelle que pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fixé, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u-\omega}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto \ln|u-\omega| + i\arg(u-\omega)$, où $\arg(u-\omega)$ désigne l'argument de $u-\omega$ strictement compris entre $-\pi$ et π.

a. Montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^{2p}}$.

b. En précisant l'ensemble Ω, établir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$. :

$$\frac{1}{1+u^{2p}} = -\frac{1}{2p} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\omega}{u-\omega}.$$

c. Montrer qu'en calculant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{2p}}$ dans l'expression précédente, la contribution logarithmique est nulle.

d. En posant $\alpha = e^{i\pi/p}$, simplifier $(1-\alpha)\displaystyle\sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^k$ et en déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.$$

e. Montrer que la fonction $x \mapsto \pi x - f(x)\sin(\pi x)$ est développable en série entière en 0 et en déduire que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}.$$

Ex 6 : (E3A MP 2007 épreuve B)

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. On pose $J_n = J_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est noté $\mathbf{v}$.

1. Montrer l'égalité $J_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

2. Déterminer l'image de J_n. Quelle est la dimension du noyau de J_n ?

3. Calculer J_n^2.

4. Montrer que J_n est diagonalisable. Expliciter ses valeurs propres et pour chacune, préciser la multiplicité.

Soit M une matrice de taille n à coefficients réels.

5. Dans cette question, on considère l'équation $\mathcal{E}$ d'inconnue le réel x : $\det(M + xJ_n) = 0$.

On note $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\mathcal{E}$.

- ***a.*** Lorsque $M = 0$, la matrice nulle, déterminer $\mathcal{S}_\mathcal{E}$.
- ***b.*** Lorsque $M = I$, la matrice identité, montrer que $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est réduit á un unique élément. Préciser cet élément.
- ***c.*** On suppose M inversible. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - i. Montrer qu'un vecteur $\mathbf{w}$ dans le noyau de $M + xJ_n$ est colinéaire au vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$.
  - ii. Soit $\mathbf{w} = M^{-1}\mathbf{v}$. En notant σ la somme des coordonnées du vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$, démontrer l'équivalence : $(M + xJ_n)\,\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow \left(1 + x\frac{\sigma}{n}\right) = 0$.

    En déduire que $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est au plus de cardinal 1. Pour quelle valeur de σ, l'ensemble $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est-il vide ?
- ***d.*** On se propose de déterminer $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ lorsque M est non inversible.
  - i. Montrer que $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est non vide.
  - ii. S'il existe un réel b tel que $M + bJ_n$ est inversible, établir une bijection entre $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ et l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{F})$ d'inconnue x, définie par :

$$\det(M + bJ_n + xJ_n) = 0$$

  - iii. Conclure.

6. Soit f la fonction de la variable réelle x définie en posant : $f(x) = \det(M + xJ_n)$.

- ***a.*** Démontrer qu'il existe des réels α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha + x\beta$. Expliciter α et β en fonction de M et des coefficients de la comatrice de M.

  On rappelle que la comatrice de M est la matrice dont le (i, j)-éme coefficient est le déterminant de la matrice obtenue en retirant á M sa i-éme ligne et sa j-éme colonne, multiplié par $(-1)^{i+j}$, pour tous les indices i et j dans $\{1, \ldots, n\}$.
- ***b.*** Retrouver ainsi les résultats de la question 5.

Ex 7 : (E3A PC 2001 épreuve 1 NC) Soient $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et (P) : $\left\{\begin{array}{lcl} y" - y & = & f \\ y(0) & = & y'(0) \\ y(1) & = & -y'(1) \end{array}\right.$

1. Soit y_0 une solution particulière de $y" - y = f$ sur I. Déterminer en fonction de y_0 l'ensemble des solutions de cette équation.
2. Exprimer la solution de (P) (dont on démontrera l'unicité) à l'aide de y_0 et y_0'.
3. Résoudre (P) pour $f(x) = x$ puis $f(x) = x^2$.
4. Montrer dans le cas général que $T(f) : x \mapsto -\dfrac{e^x}{2}\displaystyle\int_x^1 f(t)e^{-t}dt - \dfrac{e^{-x}}{2}\displaystyle\int_0^x f(t)e^t dt$ est la solution de (P).
5. Montrer que $\|T(f)\|_\infty \leq \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\|f\|_\infty$.
6. Montrer que l'application $T : f \mapsto T(f)$ est continue de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ dans lui-même.

Ex 8 : (E3A MP 2006 épreuve B)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = M_n(\mathbf{C})$. Soit $F = (f_{ij})$ la matrice définie par : $\left\{\begin{array}{c} \forall i \in \{1,\ldots,n-1\}, f_{i,i+1} = 1 \\ f_{n,1} = 1 \\ f_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$

1.
   a. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de F.
   On note $\{\lambda_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ les valeurs propres de F.
   b. La matrice F est-elle diagonalisable dans E ? La matrice F est-elle inversible ?
   c. Soit $G = \{F^p, p \in \mathbf{Z}\}$.
   Montrer que G est un groupe cyclique d'ordre n pour la multiplication des matrices.
   Préciser tous les éléments générateurs du groupe G.
   d. Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Vect}(G)$.
   e. Calculer la trace d'un élément de G.
2. Soit le polynôme $p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ et $A = p(F)$.
   a. Montrer que : $Sp(A) = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\} \cup \left\{\dfrac{n}{\lambda_k - 1}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$.
   b. Vérifier que : $\det(A) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)n^{n-1}}{2}$.
3. On se propose dans cette question de déterminer l'inverse de la matrice A.
   a. Prouver que : $A^{-1} \in \mathrm{Vect}\left(\{A^k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}\right)$.
   b. En déduire qu'il existe des scalaires $(u_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ tels que : $A^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k F^k$.
   c. Montrer que : $(F - I_n)^2 A = n(F - I_n)$.
   d. Prouver que : $\left\{\begin{array}{l} u_2 = u_3 = \ldots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = \dfrac{1}{n} \\ u_1 - u_2 = \dfrac{1}{n} \end{array}\right.$
   e. En calculant de deux façons différentes la trace de la matrice A^{-1}, déterminer u_0.
   f. En déduire A^{-1}.

Ex 9 : (E3A MP 2009 épreuve B)

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \dfrac{(-x)^n}{3n+1}$.
2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{3n}dt$, avec $n \in \mathbb{N}$.

   b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^3)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-t^3)^n dt$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et calculer sa somme.

Ex 10 : (E3A PSI 2009 épreuve B) On considère une matrice carrée A d'ordre 4 à coefficients réels. On suppose que le rang de A est égal à 3, que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1, que -1 est valeur propre double de A.

1. Prouver que 0 est valeur propre de A.
2. Prouver que 1 est valeur propre de A.
3. Déterminer le polynôme caractéristique noté $P_A(X)$ de la matrice A.
4. Pour k entier nature, $k \geq 4$, déterminer le reste, noté $R_k(X)$, de la division euclidienne de X^k par $P_A(X)$.
5. Pour k entier naturel, $k \geq 4$, démontrer que A^k est combinaison linéaire de A, A^2 et A^3 et déterminer cette combinaison linéaire.

Ex 11 : (E3A PSI 2006 épreuve B)
$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de E et I_n la matrice unité de E. Pour M élément de E, M^T et $\operatorname{tr}(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M.
Pour (i,j) élément de $\{1,2,\ldots,n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.
Soient A et B deux éléments fixés de E et f l'endomorphisme de E défini par : $\forall M \in E,\ f(M) = AMB$.

1. Soit C un élément de E. Calculer $CE_{i,j}$ et $E_{i,j}C$.
   On suppose que pour tout M élément de E, $CM = MC$. Prouver qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $C = aI_n$.
2. Pour M et N appartenant à E, on pose $< M|N >= tr(M^TN)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
   Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.
3. Montrer que : $\forall M \in E,\ f^*(M) = A^TMB^T$.
4. Dans cette question on veut déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit un automorphisme orthogonal de E.

   a. Pour tout $M \in E$, déterminer $(f^* \circ f)(M)$.

   b. On suppose que f est une isométrie vectorielle de E.
   Prouver que les matrices A^TA et BB^T sont inversibles et que l'une est l'inverse de l'autre.
   Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $AA^T = aI_n$.

   c. Démontrer que f est une isométrie vectorielle de E si et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ et deux matrices Ω_1 et Ω_2 appartenant à $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = \lambda\Omega_1$ et $B = \dfrac{1}{\lambda}\Omega_2$.

Ex 12 : (E3A PC 2009 épreuve B)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $2n$; il est muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).
Soit $\Delta : E \longrightarrow E$ défini par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

1. **a.** Soit $F = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$ et $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et orthogonaux.
Préciser la dimension de F et de G.

b. Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.

c. En considérant la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^{2n})$, déterminer les valeurs propres de Δ. Préciser si Δ est diagonalisable, et la dimension des sous-espaces propres.

d. Soit $k \in [|0, 2n|]$, et on pose $\lambda_k = k(k+1)$.
Justifier l'existence d'un unique vecteur propre P_k de Δ associé à λ_k, tel que P_k soit de degré k et admette 1 comme coefficient de X^k ?

e. Montrer que pour tous P et Q dans E, on a : $\langle \Delta(P), Q \rangle = \langle P, \Delta(Q) \rangle$.
En déduire que pour tout $(k, h) \in [|0, 2n|]^2$ tel que $k \neq h$, on a : $\langle P_k, P_h \rangle = 0$.
Que peut-on en déduire pour $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{2n})$?

f. Montrer que $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est une base de F et $(P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1})$ est une base de G.

2. On prend ici $n = 1$, et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$, toujours muni du produit scalaire défini par : $\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

a. Expliciter P_0, P_1, P_2 définis en 1. , et en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour Δ.

b. Soit $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Calculer la distance euclidienne de $A = X + 1$ au sous-espace vectoriel G de E.

c. Montrer que $C = \{h \in \mathcal{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3.
On pourra utiliser la matrice de Δ et de $h \in C$ dans la base (P_0, P_1, P_2).

d. Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = \Delta$. On les donnera par leur matrice dans la base (P_0, P_1, P_2).

Ex 13 : (E3A PC 2010 épreuve B NC)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

a. Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$. On notera φ ce prolongement.

b. Montrer que φ est DSE au voisinage de 0.

c. Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$. Montrer que I existe.

4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}dx$.

a. Montrer, et justifier leur convergence, que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}dx = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$.

b. Déterminer deux réels C et D tels que : $I(a) = C\displaystyle\int_a^{3a} \varphi(x)dx + D$.

c. En déduire I.

<u>Ex 14</u> : (E3A PSI 2012 épreuve B)

On admettra que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est à dire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A \text{ nilpotente si et seulement si : } \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0.$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(G, \times)$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall X \in G,\ X^p = I_n$$

où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $E = \mathrm{Vect}(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la partie G.

1. **a.** Vérifier que E est un espace vectoriel de dimension finie.

b. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(M_1, \ldots, M_r)$ <u>d'éléments de G</u> qui soit une base de E. On ne cherchera pas à calculer r ni à déterminer les matrices M_j.

2. On note U_p l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité.

a. Préciser le cardinal de U_p et expliciter ses éléments.

b. Soit X une matrice élément de G et λ une valeur propre de X. Montrer que $\lambda \in U_p$.

3. Prouver que tout élément de G est diagonalisable.

4. Prouver que l'ensemble $\mathcal{S} = \{\mathrm{Tr}(X),\ X \in G\}$ est fini. Donner un majorant du cardinal de $\mathcal{S}$.
On considère alors l'application

$$\varphi\ :\ X \in G \mapsto \varphi(X) = (\mathrm{Tr}(XM_1), \ldots, \mathrm{Tr}(XM_r)) \in \mathbb{C}^r$$

5. Soient A et B deux éléments de G tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. On note $N = AB^{-1} - I_n$.

a. Justifier que $AB^{-1} \in G$. En déduire que N est diagonalisable.

b. Montrer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\},\ \mathrm{Tr}(AM_i) = \mathrm{Tr}(BM_i)$$

En déduire que

$$\forall X \in E,\ \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. En écrivant que $(AB^{-1})^k = AB^{-1}\ldots AB^{-1}$ (k facteurs) et en utilisant la question précédente, montrer que

$$\mathrm{Tr}((AB^{-1})^k) = n$$

d. Calculer alors $\mathrm{Tr}(N), \mathrm{Tr}(N^2), \ldots, \mathrm{Tr}(N^n)$. Que peut-on dire de la matrice N ?

e. Montrer que φ est injective.

6. Montrer que $\varphi(G) \subset \mathcal{S}^r$.

7. Que peut-on en déduire pour G ?

Ex 15 : (E3A PSI 2013 épreuve B)
Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+(nx)^2}$ converge.

On définit alors la fonction f de I dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+(nx)^2}$.

2. Déterminer le sens de variation de f.

3. Prouver que f est de classe C^1 sur I.

4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

5. **a.** Vérifier que $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in I,\ \dfrac{1}{1+(p+1)^2x^2}\leq\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{dt}{1+t^2x^2}\leq\frac{1}{1+p^2x^2}$.

b. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Ex 16 : (E3A MP 2013 épreuve B)
On note A une matrice carrée d'ordre $n>0$ à coefficients complexes, I_n est la matrice identité carrée d'ordre $n>0$ ayant des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.
Le noyau et l'image d'une matrice désignent respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice.
On considère la matrice M_A carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs de la façon suivante :

$$M_A=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ A & 0\end{pmatrix}.$$

1. Soit ϕ l'application qui à tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$ associe le vecteur $\begin{pmatrix}0\\X\end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^{2n}$.

a. Montrer que ϕ est une application linéaire.

b. Montrer que ϕ est bijective du noyau de la matrice A vers le noyau de la matrice M_A. Quelle relation en déduit-on entre les dimensions de $\mathrm{Ker}\,(M_A)$ et de $\mathrm{Ker}\,(A)$?

c. En déduire le rang de la matrice M_A en fonction du rang de la matrice A.

2. On suppose, dans cette question, que la matrice A est diagonalisable et inversible.

a. Exprimer la matrice M_A^2 en fonction de A.

b. Démontrer que la matrice M_A^2 est diagonalisable.

c. Montrer que la matrice M_A^2 est inversible.

d. En déduire que la matrice M_A est diagonalisable.

3. On suppose, dans cette question, que la matrice M_A est diagonalisable.

a. Démontrer que $Im(M_A)=Im(M_A^2)$.

b. En déduire $\mathrm{Ker}\,(M_A)=\mathrm{Ker}\,(M_A^2)$.

c. Montrer que la matrice A est inversible (indication : pour $X\in\mathrm{Ker}\,A$, on pourra considérer le vecteur $\begin{pmatrix}0\\X\end{pmatrix}$).

d. Démontrer que la matrice A est diagonalisable.

4. Que peut-on déduire des questions 2) et 3) ?

<u>Ex 17</u> : (E3A PC 2016 épreuve 1) Soit E_0 l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restritction sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ sont toutes deux des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que E_0 est un espace vectoriel.

2. Soit $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = dX^2 + eX + f$ et soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{lll} P(x) & \text{si} & x \leq 0 \\ Q(x) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. .$$

Déterminer une CNS pour que H soit dans E_0.
En déduire une base et la dimension de E_0.

3. Soit $\psi_0 : \left\{ \begin{array}{lll} E_0 & \to & \mathbb{R}^3 \\ H & \mapsto & (H(0), H'(0), H(1)) \end{array} \right.$.
Montrer que ψ_0 est surjective et déterminer son noyau.

<u>Ex 18</u> : (E3A MP 2015 épreuve 1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$une suite de réels non nuls. On pose $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. On note $P_n(X) = \det(XI_n - A_n)$

1. Déterminer une relation de récurrence entre $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$.

2. ***a.*** Montrer que A_n est diagonalisable.

b. Soit $\lambda \in Sp(A)$ réel. Calculer $\begin{vmatrix} -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda - a_2 & & \ddots & \ddots & 0 \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ & \cdots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{vmatrix}$.

c. En déduire $\operatorname{rg}(\lambda I_n - A_n)$.

d. En déduire que P_n admet n racines réelles distinctes.

3. On pose $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{vmatrix}$.

a. Pour $n \geq 2$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2\Delta_{n-1}(x)$.

b. Montrer que $\Delta_1(x)$ est strictement positif pour tout x de $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour $n \geq 2$.

4. Montrer que l'application $x \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule entre deux zéros consécutifs de P_n (on pourra considérer $x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$).

Ex 19 : (E3A MP 2014 épreuve B)
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $E = \mathbb{K}^n$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $Im(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$. En déduire une inégalité sur $\operatorname{rg}(u)$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $u \neq 0$.

- ***a.*** Montrer qu'il existe une droite D de E telle que $Im(u) = \operatorname{Ker}(u) = D$.
- ***b.*** Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = 0$ et $uv = vu$. Montrer que $v(D) \subset D$ et que $uv = 0$.
- ***c.*** Soient $v, w \in \mathcal{L}(E)$ tels que $v^2 = w^2 = 0$, $uv = vu$ et $uw = wu$. Montrer que $vw = 0$.

3. On revient au cas général. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$. Soient $u_1, ..., u_m \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1, m]\!]^2,\ u_i^2 = 0 \ \text{ et } \ u_i u_j = u_j u_i.$$

On pose $F_1 = \operatorname{Im}(u_1)$ et $F_i = Im(u_1 u_2 ... u_{i-1} u_i)$ pour tout $i \in [\![2, m]\!]$.

- ***a.*** Montrer que F_i est un sous-espace stable par u_{i+1}, pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$.
- ***b.*** En déduire que $\dim(F_i) \leq n/2^i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.
- ***c.*** Si $n < 2^m$, montrer que $u_1 u_2 ... u_m = 0$.

4. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ***a.*** Montrer que : $E = \operatorname{Ker}(A) \oplus Im(A^T)$.
- ***b.*** On suppose de plus que $A^2 = 0$. Montrer que : $Im(A + A^T) = Im(A) + Im(A^T)$.

Ex 20 : (E3A MP 2017 épreuve 1) Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1. Soit un entier n strictement positif.

- ***a.*** Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\, \mathrm{d}t$.
- ***b.*** En effectuant le changement de variable $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\, du$ en fonction de l'intégrale I_n.
- ***c.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \geqslant 1 + u$.

2. Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\, du$.

- ***a.*** Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}\, du$.
- ***b.*** En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

4.

- ***a.*** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).
- ***b.*** Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que : $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\, \mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad |x| < R$.

Ex 21 : (E3A MP 2017 épreuve 1)
E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x,y) \longmapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) : $\quad \forall (x,y) \in E \times E, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

a. étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i,j)-ème coefficient de A. Justifier : $a_{i,j} = (u(e_j)|e_i)$.

b. En déduire l'égalité : $A^T = -A$.

2. Montrer que l'entier n est un nombre pair (on pourra considérer le déterminant de la matrice A).

3. On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4. Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.

5. On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

a. Montrer que la dimension de F est égale à 2.

b. Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.

c. Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : On pourra considérer les vecteurs $e'_1 = \dfrac{1}{\| x \|} x$ *et* $e'_2 = \dfrac{1}{a \| x \|} u(x)$.

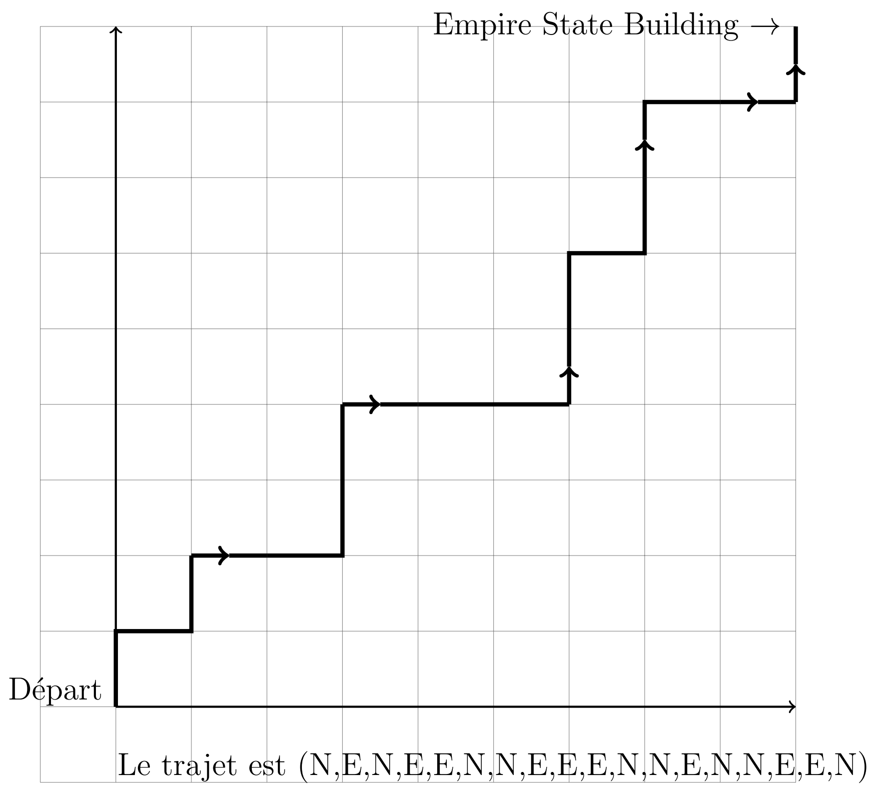
d. Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6. On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$" de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à : $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 22 : (E3A MP 2017 épreuve 1)
Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.
À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.
À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).
On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit l un entier naturel non nul. Un trajet de l étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \ldots, u_l)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et l, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x,y) où x reprśente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de l étapes (l est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant l$ définies par récurrence par : $x_0 = y_0 = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant l$,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



1. ***a.*** En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement l étapes où $l \in \mathbb{N}^*$.

b. Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.

c. Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'événement "Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$". On pourra noter N_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord" et E_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est".

a. Calculer la probabilité de l'événement U_1.

b. Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$.

c. Soit $n \geqslant 2$. On admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n - 1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n - 1, n)$. Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n - 1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d. En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n - 1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e. Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n - 1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f. En déduire que pour $n \geqslant 2 : P(U_n) = \dfrac{1}{2^{2n-1}} \times \dfrac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}$, $P(U_n) = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$.

3. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.

a. Déterminer le réel a tel que : $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b. En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)$.

c. En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que : $v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire ?

Ex 23 : (E3A MP 2016 épreuve 1)
Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits. Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée. On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et le produit B avec la probabilité $1 - p$.
On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

4. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $Cov(X, N)$.

7. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ et on pose : $S(k, x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$. Exprimer $\mathbb{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ, $S(k; \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1-p))$.

8. On utilise dans cette question le langage de programmation PYTHON.

a. Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.

b. On suppose dans cette question que $p = 1/2$ et $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement cinq boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

Ex 24 : (E3A MP 2018 épreuve 1)
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \dots, X_n$: si $k_1, \dots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1, \dots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, \dots, k_n\}$ pour $(k_1, \dots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]$.

Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note $\{X_1, \dots, X_n\} = S$ la réunion des événements
$(X_1, \dots, X_n) = (k_1, \dots, k_n)$ pour tout $(k_1, \dots, k_n) \in [\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, \dots, k_n\}$.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?

2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.

- ***a.*** Écrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
  On pourra utiliser la fonction `random.randint`.
  L'instruction `random.randint(1,25)` fournit un nombre aléatoire dans $[\![1, 25]\!]$ uniformément.
- ***b.*** Écrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}. Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.

3. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?

4. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

5. En déduire $\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

6. Justifier

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell} \right)$$

où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

7. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:

$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))$$

8. Exprimer $\mathbb{E}(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

9. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et $n \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

10. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et $\ell \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

11. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

- ***a.*** Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est à dire $\mathbb{E}(D_n)$.
- ***b.*** Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex 25 : (E3A PSI 2018 épreuve 1)
$\mathcal{D}_2$ désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables.

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué de matrices diagonalisables.

2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_2$

3. $\mathcal{D}_2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? *On pourra utiliser des arguments de dimension.*

4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de v contenant $\mathcal{D}_2$.

5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.

   a. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b. Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathcal{D}_2 \subset F$.

   c. $\mathcal{D}_2$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.

Ex 26 : (E3A PSI 2020)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

   a. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

   b. Exprimer l'évènement $(X_1 = X_2)$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

   c. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}$.

   On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

   Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

   a. Calculer $\mathbf{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\mathbf{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

   b. On suppose dans cette question que A est une matrice symétrique réelle.

   Démontrer que $\mathbf{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice A.

   c. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

<u>Ex 27</u> : (E3A PSI 2019 épreuve 1)
Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } X_1(\omega) = 0 \text{ ou si } X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} \text{ si } X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

<u>Ex 28</u> : (E3A PC 2020) Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

- ***a.*** Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
- ***b.*** Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

<u>Ex 29</u> : (E3A PC 2022)
On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(x^2+4)}$.

4.
- ***a.*** Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- ***b.*** Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.
- ***c.*** Calculer la dérivée de G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = t\ln(t^2+4) - 2t + 4\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
- ***d.*** Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}\, t$.

<u>Ex 30</u> : (CCP 2011 épreuve 1) On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. On note S la fonction somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R, R[$.
3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

<u>Ex 31</u> : (CCP 2012 épreuve 1)
On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$: $\displaystyle\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\, dt$ et $\displaystyle\|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt$.

1. Démontrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.
   De même, $\| \ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.
2. a. Donner la définition de deux normes équivalentes.
   b. Démontrer que les deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont équivalentes sur E.
3. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\| \ \|$?

<u>Ex 32</u> : (CCP 2021 épreuve 1)
On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $\displaystyle I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt$.
2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi^2}{8}$.
   On pourra utiliser librement que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

<u>Ex 33</u> : (E3A PC 2019 épreuve 1)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \cdots, X^{2n})$ et a un réel.
On considère l'application Φ_a définie sur E par : $\forall P \in E,\ \Phi_a(P) = \left(\dfrac{1}{4} - X^2\right) P' + aXP$.

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour que lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.
   Désormais a est choisi de sorte que Φ_A est un endomorphisme de E.
2. Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$. Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \dfrac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda P$.
3. Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.
   On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.
4. Déterminer une matrice B dont les spectre est $[\![0, 2b]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.
5. Expliquer comment construire à l'aide de Φ_a, un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 9, \cdots, 4n^2$ comme valeurs propres.