SUJET 1

Banque « Agro-Véto »
A - 0506

BCPST 2006

MATHÉMATIQUES B

Durée : 3 heures 30 minutes.

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois parties du problème sont indépendantes si, pour traiter la partie III, on admet le lemme II.4.

Objectifs.
L'objectif du problème est l'étude de l'efficacité d'un traitement T destiné à éradiquer une population de cellules indésirables. Pour tester T on agit comme suit :

1) On prélève une cellule unique C_0 à laquelle on applique T, ce qui a pour effet de partager C_0 en un nombre naturel aléatoire D_1 de cellule(s) identique(s) à C_0 qu'on appellera enfant(s) de C_0 ou descendant(s) de première génération de C_0 lorsque $D_1 > 0$; si $D_1 = 0$ (ce que l'on souhaite), le traitement est terminé.
2) Lorsque C_0 a k enfant(s) avec $k \geqslant 1$, on leur applique à chacun le traitement T et leur comportement sera le même que celui de C_0 et ceci indépendamment les uns des autres lorsque $k > 1$.
3) À l'issue de cette deuxième étape, on obtiendra un nombre naturel aléatoire D_2 de descendant(s) de deuxième génération. Si $D_2 = 0$, on s'arrête, sinon, on poursuit dans les mêmes conditions et, pour $n \geqslant 1$, on notera D_n le nombre de descendant(s) de n-ième génération tant que $D_n > 0$.

Remarque $(*)$: les cellules de $(n+1)$-ième génération de C_0 sont celles de n-ième génération de l'ensemble des enfants de C_0.

Notations

- On notera conventionnellement $D_0 = 1$.
- On notera $p_k = P[D_1 = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$ (p_k représente donc la probabilité pour une cellule quelconque C d'avoir k enfants, étant entendu qu'on utilisera la même variable aléatoire pour toutes les cellules sauf en cas d'ambiguïté). On supposera bien entendu $0 < p_0 < 1$ et on aura $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.
- On notera $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = P[D_n = 0]$. Lorsque $\lim u_n = 1$ c'est-à-dire lorsque avec probabilité 1 la descendance de C_0 s'éteint au bout d'un nombre fini de générations on dira que T est efficace. On désignera par G le nombre aléatoire de générations de descendants de C_0. Ainsi
  si C_0 n'a pas d'enfant ($D_1 = 0$), alors $G = 0$;
  si $D_1 > 0$ et $D_2 = 0$, alors $G = 1$;
  si d'une façon générale, pour $n_0 \geqslant 1$, $D_{n_0-1} > 0$ et $D_{n_0} = 0$, alors $G = n_0 - 1$.
- On notera $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire réelle X. Pour deux événements A et B avec $P(B) \neq 0$, $P[A|B]$ désignera la probabilité conditionnelle de A sachant B.

I Un premier exemple.

I.1. La loi de D_1 est définie par $p_0 > 0$ et $p_1 > 0$ tels que $p_0 + p_1 = 1$.

I.1.a) Calculer u_0 et u_1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, D_n ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

I.1.b) Montrer que s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $D_n = 0$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$, $D_{n+k} = 0$.

I.2.a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0] = P[D_{n+1}=0|D_1=0]\,p_0 + P[D_{n+1}=0|D_1=1]\,p_1$$

puis en utilisant la remarque $(*)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0|D_1=0] = u_n$ et enfin que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p_0 + p_1 u_n$.

I.2.b) En posant $v_n = 1 - u_n$, montrer que $u_n = 1 - p_1^n$ et en déduire la limite de u_n.

I.2.c) Montrer que $P[G > n] = 1 - u_{n+1} = p_1^{n+1}$ puis que $P[G = n] = p_0 p_1^n$ et enfin que $E(G) = p_1/p_0$.

II Deuxième exemple.

II.1. La loi de D_1 est définie par p_0, p_1 et p_2 tels que $p_0 > 0$, $p_2 > 0$ et $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

II.1.a) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0||D_1=k] = u_n^k$. On utilisera notamment la remarque $(*)$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P[D_{n+1}=0] = \sum_{k=0}^{2} P[D_{n+1}=0|D_1=k]\,p_k = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2.$$

II.2. Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2.$$

II.2.a) Vérifier que $f > 0,\ f' \geqslant 0,\ f'' > 0,\ f(1) = 1,\ f'(1) = 1 - p_0 + p_2$.

II.2.b) Représenter le graphe de f dans les trois cas suivants : $f'(1) < 1$, $f'(1) = 1$ et $f'(1) > 1$ (on choisira des valeurs simples de p_0, p_1, p_2 pour chaque cas).

II.2.c) Vérifier par le calcul que

i) pour $f'(1) \leqslant 1$, le graphe de f est au-dessus de la première bissectrice Δ : $(y = x)$;

ii) pour $f'(1) = 1$, le graphe est tangent à Δ au point $I(1,1)$;

iii) pour $f'(1) > 1$, le graphe recoupe la première bissectrice au point $L(p_0/p_2, p_0/p_2)$.

II.2.d) Montrer que la suite de terme général u_n est strictement croissante et majorée par $\min(p_0/p_2, 1)$.

II.2.e) En déduire la limite de la suite de terme général u_n dans les différents cas envisagés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le traitement soit efficace (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$).

II.3. Examen des différents cas.

II.3.a) Cas où $f'(1) < 1$: démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_{n+1} \leqslant (1 - u_n) f'(1)$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_n \leqslant (1 - u_0)[f'(1)]^n$.

II.3.b) On s'intéresse au cas où $f'(1) = 1$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{p_0}{p_1 + p_0(1+u_n)} \leqslant 1.$$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1-u_{k+1}} - \frac{1}{1-u_k}\right) = \frac{1}{1-u_n} - 1 \leqslant n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

II.3.c) Montrer que $E(D_1) = f'(1)$ et que $P[G > n] = 1 - u_{n+1} = P[D_{n+1} \neq 0]$.

II.4. Lemme : soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance $E(X)$.

II.4.1) Montrer que : $\forall N \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kP[X=k] = \sum_{k=0}^{N-1} P[X>k] - NP[X>N]$.

On pourra utiliser $P[X=k] = P[X>k-1] - P[X>k]$.

II.4.2) Montrer que $\forall N \geqslant 1,\ NP[X > N] \leqslant R_N$, où $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP[X = k]$ est le reste de la série convergente $\sum kP[X = k]$ dont la somme est $\sum_{k=0}^{+\infty} kP[X = k] = E(X)$.

II.4.3) En déduire que $NP[X > N] \to 0$ quand $N \to \infty$ puis que

$$E(X) = \sum_{N=0}^{+\infty} NP[X > N].$$

II.5. Déduire de ce qui précède que :

- si $f'(1) < 1$ alors $E(G) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - u_n) \leqslant \dfrac{f'(1)}{1 - f'(1)}$.
- si $f'(1) = 1$ alors G n'a pas d'espérance (on utilisera le fait que la série de terme général $1/(n+1)$ est divergente).

III Étude d'un cas où D_1 prend une infinité de valeurs.

III.1. Soit D_1 une variable aléatoire définie par $\forall k \in \mathbb{N},\ P[D_1 = k] = pq^k$ avec $p > 0$, $q > 0$ et $p + q = 1$.

III.1.a) Montrer que $P[D_{n+1} = 0 | D_1 = k] = u_n^k$ pour tout k entier naturel, puis que $u_{n+1} = P[D_{n+1} = 0] = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^k u_n^k = \dfrac{p}{1 - qu_n}$.

III.1.b) Étudier la fonction g définie par $x \mapsto g(x) = \dfrac{p}{1 - qx}$ pour $x \in [0, 1]$ et vérifier les propriétés suivantes de g : $g > 0$, $g' > 0$, $g'' > 0$, $g(1) = 1$ et $g'(1) = q/p$.

III.1.c) Montrer que dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$ admet les deux solutions 1 et p/q.
En déduire que la limite éventuelle de u_n ne peut être que 1 ou p/q.

III.1.d) Montrer que la suite u_n est croissante et converge vers $\min(1, p/q)$.

III.2. Expression de u_n en fonction de n.

III.2.a) On suppose ici $p \neq q$. On pose $v_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$. Montrer que $v_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$ puis que

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$$ et retrouver ainsi le résultat de 1-d.

III.2.b) On suppose ici que $p = q = 1/2$. Montrer que $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$. On pose $w_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n. En déduire que $w_{n+1} = n + 1$ puis que $u_n = \dfrac{n}{n + 1}$ et retrouver ainsi le résultat de 1-d.

III.2.c) Calculer $E(D_1)$ et vérifier qu'elle est égale à $g'(1)$ et montrer que T est efficace si et seulement si $E(D_1) \leqslant 1$.

III.2.d) On suppose $g'(1) < 1$. Calculer $1 - u_n$ et montrer que $1 - u_n \leqslant \left(\dfrac{q}{p}\right)^n = [g'(1)]^n$; en déduire que $E(G) \leqslant \dfrac{g'(1)}{1 - g'(1)}$.

III.2.e) On suppose $g'(1) = 1$ $(p = q)$. Montrer que $1 - u_n = \dfrac{1}{n + 1}$ et en déduire que G n'a pas d'espérance.

FIN.

SUJET 2

HEC 2014 BL

d) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.

e) Montrer que Y admet une espérance que l'on déterminera.

3. On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}.$$

a) Montrer que f est une densité.

On suppose que X a pour densité f.

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

c) À l'aide de la question 1, déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

EXERCICE 3

- Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à coefficients réels et pour tout couple $(r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients réels.
- On identifie les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.

Soit n un entier naturel. On dispose de $n+1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$.
Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j.
On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_n$.
- À l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in [\![0,n]\!]$), le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel k non nul, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage.
Le premier tirage ayant lieu dans l'urne $\mathcal{U}_n$, on pose $X_0 = n$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour tout entier naturel k, on considère la matrice W_k de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P([X_k=0]) \\ P([X_k=1]) \\ \vdots \\ P([X_k=n]) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k, on note $E(X_k)$ et $V(X_k)$ respectivement, l'espérance et la variance de X_k.

1.a) Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, écrire $P([X_{k+1}=j])$ en fonction de certains des nombres $P([X_k=i])$, où $i \in [\![0,n]\!]$.

b) En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$.

2.a) Déterminer la matrice ligne $B \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.

b) Calculer le produit BA en fonction de B.

c) Exprimer pour tout entier naturel k, $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.

d) En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n.

3.a) Déterminer la matrice ligne C de $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $CW_k = E(X_k^2)$.

b) Calculer le produit CA en fonction de B et C.

c) Pour tout entier naturel k, exprimer $E(X_{k+1}^2)$ en fonction de $E(X_k^2)$ et $E(X_k)$.

4. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = E(X_k^2) - \dfrac{n}{2^k}$.

a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de $E(X_k^2)$ en fonction de k et n.

c) Exprimer $V(X_k)$ en fonction de k et n.

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et on rappelle que la base canonique de cet espace est $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ où, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, la fonction e_j est définie par $e_j(x) = x^j$.

Soit f l'application qui, à une fonction polynôme S de $\mathbb{R}_n[x]$, associe la fonction $Q = f(S)$ définie par :

$$Q(x) = f(S)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x S(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 1 \\ S(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

5.a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

6. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on définit la fonction polynomiale q_j par $q_j = (x-1)^j$.

a) Montrer que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ constituée de vecteurs propres de f.

b) Écrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage T de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer la matrice T^{-1}, inverse de T.

d) Écrire pour tout entier naturel k, la dernière colonne de la matrice A^k.

7.a) Montrer que pour tout entier naturel k, la loi de X_k est donnée par :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P([X_k = j]) = \binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\binom{n-j}{i}\frac{1}{(j+i+1)^k}.$$

b) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} P([X_k = j])$. Interpréter l'issue asymptotique des tirages.

Tournez la page S.V.P.

SUJET 3

SESSION 1999 M002

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Préambule

On étudie des propriétés de la série de fonctions de la variable réelle dont le terme général est, k étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$u_k : x \mapsto \frac{1}{(k+x)^{\frac{3}{2}} + (k+x)^{\frac{1}{2}}}$$

Quand elle existe, on note la somme de cette série par :

$$U(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

L'origine historique de ce problème est au cœur de la troisième partie : la fonction U permet l'étude d'une fonction T associée à la définition de la spirale de Théodorus.

PARTIE I

Dans cette partie, on étudie des propriétés liées à la régularité de U, notamment son comportement aux bornes de son intervalle de définition, ainsi que son intégrabilité.

1. Montrer que le domaine de définition de U est $\left]-1,+\infty\right[$. Dans toute la suite, on note I cet intervalle.

2. a) Montrer que l'application $x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(x)$ est définie et de classe C^1 sur $\left[-1,+\infty\right[$.

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire alors :

i. que U est de classe C^1 sur I,

ii. qu'il existe deux réels λ et μ tels qu'au voisinage de -1, on ait :

$$U(x) \sim \frac{\lambda}{(x+1)^{\mu}}$$

3. **a)** Montrer que U est intégrable sur l'intervalle $]-1,0]$.

b) Pour $-1 < a < b$ et k entier naturel non nul, calculer $\int_{[a,b]} u_k$. On pourra poser $t = \sqrt{x+k}$ pour $x \in [a,b]$.

c) Calculer $\int_{]-1,0]} U$.

4. On étudie U au voisinage de $+\infty$.

a) Trouver $\lim\limits_{+\infty} U$.

b) Pour $x \in I$ fixé, justifier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de l'application :

$$t \mapsto \frac{1}{(t+x)^{\frac{3}{2}} + (t+x)^{\frac{1}{2}}}$$

c) Trouver, à l'aide de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^{\frac{3}{2}} + (t+x)^{\frac{1}{2}}}$, un développement au voisinage de $+\infty$ de la forme :

$$U(x) = \frac{\delta}{x^{\nu}} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right)$$

d) U est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?

PARTIE II

Dans cette partie, on étudie plus particulièrement :

$$U(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$$

On pose :

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}$$

5. a) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul :

$$2\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \rho_n \leq 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculer alors $U(0)$ à 10^{-1} près, en justifiant le nombre de termes utilisés. Combien faut-il de termes pour calculer $U(0)$ à 10^{-3} près ?

b) Donner aussi un équivalent simple de ρ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On étudie maintenant un procédé permettant d'obtenir plus rapidement une valeur approchée de $U(0)$ à 10^{-3} près.

6. a) Montrer qu'il existe une unique suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$, soit (B_n), avec $B_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$: $\quad B_n' = nB_{n-1} \quad$ et $\quad \int_{[0,1]} B_n = 0$

b) *i.* On note $b_n = B_n(0)$. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $b_n = B_n(1)$.
ii. Calculer $B_1, B_2\ B_3$.

c) Soit $f \in C^3([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] = \int_{[0,1]} f + \int_0^1 B_1(x) f'(x)\, dx$$

puis que :

$$\frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] = \int_{[0,1]} f + \sum_{i=2}^{3} (-1)^i \frac{b_i}{i!}\left[f^{(i-1)}(1) - f^{(i-1)}(0)\right] + \int_0^1 \frac{B_3(x)}{6} f^{(3)}(x)\, dx.$$

d) Montrer qu'il existe une unique fonction $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 1, et telle que, pour tout $x \in [0,1[$, $P_n(x) = B_n(x)$. On exprimera, pour x réel quelconque, $P_n(x)$ en fonction notamment de x et de sa partie entière. Montrer que P_n est de classe C^∞ par morceaux et qu'elle est continue si et seulement si $n \neq 1$.

e) Soit $f \in C^3([0,+\infty[, \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout entier naturel j, et pour tout entier naturel non nul m :

$$\sum_{k=j}^{m+j} f(k) = \frac{1}{2}\left[f(j)+f(m+j)\right] + \int_{[j,m+j]} f + \sum_{i=2}^{3} (-1)^i \frac{b_i}{i!}\left[f^{(i-1)}(m+j) - f^{(i-1)}(j)\right] + \int_j^{m+j} \frac{P_3(x)}{6} f^{(3)}(x)\,dx$$

7. **a)** Etudier les variations de B_3 sur $[0,1]$. En déduire que, pour tout x réel, $|P_3(x)| \leq 6\,.\,10^{-2}$.

b) Soit $g : [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$, qui est donc de classe C^3. Calculer $g'(x)$ pour $x \geq 1$.

On donne le résultat suivant, pour $x \geq 1$:

$$g''(x) = \frac{15x^2 + 10x + 3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^3},$$

et on admet aussi que g'' est décroissante. En déduire l'intégrabilité de l'application :

$$[1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto P_3(x) g^{(3)}(x)$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul j :

$$\rho_{j-1} = \int_{[j,+\infty[} g + \frac{1}{2} g(j) - \frac{1}{12} g'(j) + \frac{1}{6} \int_j^{+\infty} P_3(x) g^{(3)}(x)\,dx$$

d) En déduire une valeur approchée de $U(0)$ à 10^{-3} près.

PARTIE III

Dans cette partie, on étudie une fonction T de la variable réelle et à valeurs complexes, qui utilise U de manière fondamentale.

8. On définit la série de fonctions de la variable réelle, et à valeurs complexes, dont le terme général est, k étant un entier naturel non nul :

$$v_k : x \mapsto \frac{i}{2} \frac{1}{(k+x)^{\frac{3}{2}} + i(k+x)}$$

a) Simplifier $v_k - \frac{i}{2}u_k$. En déduire que la série $\left(\sum_{k\geq 1} v_k\right)$ converge lorsque $x \in I$. On définit alors l'application $V : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$. Montrer que $V(x) = \frac{i}{2}U(x) + \frac{1}{2(x+1)}$ pour tout $x \in I$.

b) Justifier la continuité de V sur I.

9. a) Montrer qu'il existe une unique fonction $T : I \to \mathbb{C}$, de classe C^1, telle que T ne s'annule pas sur I, et que :

$$\frac{T'}{T} = V \quad \text{et} \quad T(0) = 1$$

b) Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$T(x) = \sqrt{1+x}\; e^{\frac{i}{2}\int_0^x U(t)dt}$$

c) Montrer que T se prolonge en une fonction continue sur $[-1,+\infty[$ par $T(-1) = 0$. Ce prolongement est-il dérivable en -1 ?

10. On se place dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique orienté. On considère alors l'arc plan γ, paramétré par :

$$f : I \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto \sqrt{1+t}\; \vec{u}\left(\frac{1}{2}\int_0^t U(w)dw\right)$$

où l'on a noté $\vec{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que cet arc est de classe C^1 et régulier. Donner $\tan\psi(t)$, où $\psi(t)$ est une mesure de l'angle orienté entre le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\int_0^t U(w)dw\right)$ et le vecteur tangent unitaire en $f(t)$. Que représente $U(0)$?

b) Etant donné l'intégrabilité de U sur $]-1,0]$, on prolonge γ en $t=-1$ par $f(-1)=0$. Montrer que l'arc ainsi obtenu admet en ce point une demi-tangente.

c) Tracer sommairement le support de γ.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV

Dans cette partie, on écrit $U(x)$ sous la forme d'une intégrale.

11. a) Montrer que, pour $t>0$ donné, l'application :

$$]0,t]\to \mathbb{R},\ u\mapsto \frac{e^u}{\sqrt{u}}$$

est intégrable, puis que l'application :

$$g:]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ t\mapsto \int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du$$

est de classe C^1. Donner $g'(t)$ pour $t>0$.

b) Soit $\alpha>1$. Montrer que l'application :

$$h_\alpha:]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ \ t\mapsto e^{-\alpha t}g(t)$$

est intégrable et montrer, en utilisant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, que :

$$\int_{]0,+\infty[} h_\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha-1}}$$

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul k et tout $x\in I$, une expression intégrale de $u_k(x)$.

d) Soit les applications :

$$\varphi:]0,+\infty[\to \mathbb{R},\qquad t\mapsto \frac{t}{e^t-1}$$

$$F:]0,+\infty[\to \mathbb{R},\qquad t\mapsto e^{-t}\int_0^{\sqrt{t}} e^{v^2}\,dv$$

Déduire de ce qui précède que, pour tout $x\in I$, l'application :

$$]0,+\infty[\to \mathbb{R},\qquad t\mapsto \frac{\varphi(t)F(t)}{t}e^{-xt}$$

est intégrable, et que :

$$U(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)F(t)}{t}e^{-xt}\,dt$$

12. a) Montrer que U est de classe C^∞ sur I, et exprimer sous forme intégrale les dérivées successives de U.

b) Montrer que U est convexe sur I, et tracer sommairement le graphe de U.

Fin de l'énoncé

SESSION 2009 PCM2006

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, on note F la fonction sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \qquad F(x,z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right),$$

et f la fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = F(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

PARTIE I

I.1. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé, quelconque.

I.1.1. Ecrire les développements en série entière de la variable réelle x des fonctions $x \mapsto \exp(-zx)$ et $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.

I.1.2. A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n ,$$

où A_n est une fonction polynomiale de degré n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction polynomiale H_n par $H_n = (-1)^n n! A_n$.
Donner les expressions de $H_0(z)$ et de $H_1(z)$ en fonction de z.

I.1.3. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x,z)$ à l'aide de F.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on a $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.
Donner les expressions de $H_2(z)$, $H_3(z)$ et $H_4(z)$ en fonction de z.

I.2.

I.2.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\dfrac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x\dfrac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1)\dfrac{d^n f}{dx^n}(x) = 0$.

I.2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $K_n = \dfrac{(-1)^n}{f}\left(\dfrac{d^n f}{dx^n}\right)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$.
Exprimer $K_0(x)$ et $K_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $H_n = K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.3.

I.3.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$.

I.3.2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$.

I.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction φ_n de la variable réelle x par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\varphi''_n(x) - \dfrac{x^2}{4}\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x)$, où λ_n est un nombre réel que l'on déterminera.

I.5. Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose :

$$I_{p,q} = I_{q,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx = (-1)^{p+q}\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)dx.$$

I.5.1. Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est bien définie pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
On admettra désormais que $I_{0,0} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}$.

I.5.2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ un couple de nombres entiers. A l'aide d'une intégration par parties dûment justifiée, montrer que $I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$.
En déduire la valeur de $I_{p,q}$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera les cas $q \neq p$ et $q = p$.

PARTIE II

Soit $\hat{f}$ la fonction de la variable réelle ν définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 2i\pi\nu)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)dt.$$

II.1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

II.2. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

II.3.

II.3.1. Montrer que $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
On pourra par exemple, entre autres méthodes, utiliser l'égalité $-t = 2i\pi\nu + (-2i\pi\nu - t)$.

II.3.2. Calculer $\hat{f}(0)$. En déduire l'expression de $\hat{f}(\nu)$ en fonction de ν.

PARTIE III

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :

$$u_0 = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = f(x - 2n\pi) + f(x + 2n\pi).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit U_n la fonction définie par $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On remarquera que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $U_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f(x - 2k\pi)$.

III.1. Soit A un nombre réel strictement positif.

III.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \dfrac{A}{2\pi}$. Etudier les variations sur le segment $[-A, +A]$ des fonctions $x \mapsto f(x - 2n\pi)$ et $x \mapsto f(x + 2n\pi)$.
En déduire que pour tout $x \in [-A, +A]$, on a $0 \leq u_n(x) \leq 2 \exp\left(-\dfrac{(2n\pi - A)^2}{2}\right)$.

III.1.2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $[-A, +A]$.

III.2.

III.2.1. Déduire de la question précédente que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note U sa somme.

III.2.2. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$. On admettra que U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.2.3. Montrer que U est paire.

III.2.4. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U_n(x + 2\pi)$ au moyen de $U_n(x)$, $f(x + 2(n+1)\pi)$ et $f(x - 2n\pi)$. En déduire que U est périodique de période 2π.

III.3. Soit $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ la série de Fourier de U.

III.3.1. Justifier l'égalité de U avec la somme de sa série de Fourier.

III.3.2. Montrer que l'on a $\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x) \cos nx \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

III.3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx$.
En déduire que $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx \, dx$.

III.3.4. Déduire de ce qui précède une expression de a_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de $\hat{f}$ et de n, puis exprimer a_n en fonction de n.

Fin de l'énoncé

SUJET 5

1985

E.N.S.I. Chimie Centre Option P

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME PARTIE

DURÉE : 2 heures

Notations :

$\mathbb{R}$ étant le corps des réels et v un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) de composantes v_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, on rappelle que l'application :

$$\| \bullet \| : v \in \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \| v \| = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} | v_i |$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

On désigne par $C(\alpha, \beta)$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle réel $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. A tout élément f de $C(\alpha, \beta)$ on associe sa norme $\| f \|_{[\alpha, \beta]}$ définie par :

$$\| f \|_{[\alpha, \beta]} = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} | f(x) |$$

On désigne par $C^k(\alpha, \beta)$, (k entier strictement positif), l'ensemble des fonctions k fois continûment dérivable sur $[\alpha, \beta]$.

$\mathfrak{P}_3$ désigne l'ensemble des polynômes réels de la variable réelle x de degré inférieur ou égal à 3.

Soit $[a, b]$ un intervalle réel ($b > a$) que l'on divise en n intervalles égaux de longueur h.

On pose :

$$x_i = a + i\,h \qquad i = 0, 1, \dots, n$$
$$x_n = b$$

Soit f un élément de $C^4(a, b)$ dont les dérivées sont notées f', f'', $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.

On pose :

$$\left.\begin{aligned} f_i &= f(x_i) \\ f'_i &= f'(x_i) \\ f''_i &= f''(x_i) \end{aligned}\right\} \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

On se propose de déterminer, si elle existe, une fonction g de $C^2(a, b)$ (dont les dérivées première et seconde sont notées g' et g'') satisfaisant les conditions suivantes :

Condition 1 : g coïncide dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$), avec un élément P_i de $\mathfrak{P}_3$.

Condition 2 : g vérifie les égalités :

$$g(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$
$$g'(x_0) = f'_0$$
$$g'(x_n) = f'_n$$

1° Montrer que la fonction g doit satisfaire l'ensemble des relations :

(1) $$P_i(x_i) = P_{i-1}(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

(2) $$P'_i(x_i) = P'_{i-1}(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

(3) $$P''_i(x_i) = P''_{i-1}(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

(4) $$P_i(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

(5) $$P'_0(x_0) = f'_0$$

(6) $$P'_{n-1}(x_n) = f'_n$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

2° *a.* On pose $g''(x_i) = m_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$

Démontrer que, quel que soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

(7) $$P''_i(x) = m_i \frac{x_{i+1} - x}{h} + m_{i+1} \frac{x - x_i}{h}$$

(8) $$P_i(x) = m_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + m_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + \alpha_i (x - x_i) + \beta_i$$

où α_i et β_i sont deux constantes que l'on explicitera en fonction de h, f_i, f_{i+1}, m_i et m_{i+1}.

b. Soit m l'élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes m_i ($i = 0, \ldots, n$).

Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle tridiagonale A d'ordre $n+1$ et un vecteur d de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les composantes ne dépendent que de f_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), f'_0, f'_n et h, et tels que :

(9) $$Am = d \quad \text{où}$$

(10) $$A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \bigcirc & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \bigcirc & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\lambda_0 = \mu_n = 1$$
$$\lambda_i = \mu_i = \frac{1}{2} \text{ sinon et :}$$

$$d_0 = \frac{6}{h^2}(f_1 - f_0 - h f'_0)$$

$$d_n = \frac{6}{h^2}(h f'_n - f_n + f_{n-1})$$

$$d_i = \frac{3}{h^2}(f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1}) \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

c. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1}$

(11) $$\| v \| \leqslant \| A\, v \|$$

En déduire l'existence et l'unicité de g.

3° On définit :

(12) $$a_0 = d_0 - 2 f''_0 - \lambda_0 f''_1$$

(13) $$a_i = d_i - \mu_i f''_{i-1} - 2 f''_i - \lambda_i f''_{i+1} \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$

(14) $$a_n = d_n - \mu_n f''_{n-1} - 2 f''_n$$

(15) $$L = \| f^{(4)} \|_{[a, b]}$$

3°1. Montrer en utilisant la formule de Taylor :

a. Que pour $i = 0$ ou n, $| a_i | \leqslant k\, h^2$ où k est une constante que l'on exprimera en fonction de L.

b. Que pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ il existe quatre réels $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i de l'intervalle $] x_{i-1}, x_{i+1} [$ tels que :

$$a_i = \frac{h^2}{8}[f^{(4)}(\alpha_i) + f^{(4)}(\beta_i) - 2 f^{(4)}(\gamma_i) - 2 f^{(4)}(\delta_i)]$$

En déduire que si F'' est l'élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes f''_i ($i = 0, 1, \dots, n$) alors :

(16) $$\| m - F'' \| \leqslant \frac{3}{4} h^2\, L$$

3°2. Soit Δ_i la fonction affine sur $[x_i, x_{i+1}]$ telle que :

(17) $$\begin{aligned} \Delta_i(x_i) &= f''_i \\ \Delta_i(x_{i+1}) &= f''_{i+1} \end{aligned}$$

Soit H la fonction de la variable u ($u \in \mathbb{R}$) définie sur $[x_i, x_{i+1}]$ par la relation :

(18) $$H(u) = f''(u) - \Delta_i(u) - [f''(x) - \Delta_i(x)] \frac{(u - x_i)(u - x_{i+1})}{(x - x_i)(x - x_{i+1})}$$

où $x \in] x_i, x_{i+1} [$ est fixé.

Montrer que la fonction $H'' = \dfrac{d^2 H}{du^2}$ possède au moins une racine sur l'intervalle $]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[$ et en déduire que :

(19) $$\| \Delta_i - f'' \|_{[x_i,\, x_{i+1}]} \leqslant \frac{h^2}{8} \mathrm{L}$$

Compte tenu de l'inégalité triangulaire :

(20) $$\| g'' - f'' \|_{[x_i,\, x_{i+1}]} \leqslant \| g'' - \Delta_i \|_{[x_i,\, x_{i+1}]} + \| \Delta_i - f'' \|_{[x_i,\, x_{i+1}]}$$

démontrer que :

(21) $$\| g'' - f'' \|_{[a\,,\,b]} \leqslant k_1\, h^2$$

où k_1 est une constante que l'on précisera.

3°3. Montrer qu'il existe au moins un point ξ_i de l'intervalle $]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[$ tel que :

(22) $$f'(\xi_i) = g'(\xi_i).$$

En déduire les inégalités :

(23) $$\| g' - f' \|_{[a\,,\,b]} \leqslant k_2\, h^3$$

(24) $$\| g - f \|_{[a\,,\,b]} \leqslant k_3\, h^4$$

où k_2 et k_3 sont deux constantes que l'on explicitera.

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques 3 MP

durée : 4 heures

Problème

Préliminaires (définitions et rappels).

- Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note n sa dimension et on suppose $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ son algèbre d'endomorphismes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $Mat(u, \mathcal{B})$ la matrice de u sur la base $\mathcal{B}$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel p non nul. on note $u^p = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{p\, fois}$. On pose $u^0 = Id$.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$; on notera $P(u)$ l'application linéaire définie par :

$$\forall q \in \mathbb{N}, P(u) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k u^k \text{ si } P(X) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k X^k.$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *commutant de u* l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u ; on a :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

  On rappelle que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe un entier naturel non nul p tel que $u^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Partie 0. Un exemple.

Dans cette partie, on considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : M est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les n entiers consécutifs 1, 2, …. n. Ainsi, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & n \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}(M)$ le sous-espace vectoriel formé par les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec M.

1. Démontrer que $\mathcal{C}(M)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(M)$.

Dans toute la suite du problème, u désigne un endomorphisme de E.

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u, on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé :

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id).$$

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u diagonalisable.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres. On a :

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u).$$

On pose $n_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On rappelle que la base $\mathcal{B}$ est dite adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p, une base $(e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathcal{B} = \left(e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2, \ldots, e_1^p, \ldots, e_{n_p}^p\right)$.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.
2. Pour tout entier i compris entre 1 et p, on note u_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par u. Que peut-on dire de u_i ?
3. En déduire que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si, sur une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$:
$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & V_p \end{pmatrix}$$
avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i^2$.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant n$.
6. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim \mathcal{C}(u) = n$.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

On suppose dans cette partie que u est nilpotent d'indice 2 et que $n \geqslant 2$. On note r le rang de u. On pose $s = n - 2r$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. En déduire que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.
2. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E muni de la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_r)$, montrer que la famille $(u(e'_1), u(e'_2), \ldots, u(e'_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.
3. En utilisant un sous-espace vectoriel H de E tel que $\ker u = \operatorname{Im} u \oplus H$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :
$$Mat(u, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underleftrightarrow{r} & \underleftrightarrow{s} & \underleftrightarrow{r} \end{array} \end{array}$$
I_r désigne la matrice identité d'ordre r.

4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; la matrice de v dans la base $\mathcal{B}'$ est définie par blocs en posant :
$$Mat(v, \mathcal{B}') = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{r} & \overleftrightarrow{s} & \overleftrightarrow{r} \end{array} & \end{array}$$

   Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si
$$\begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases} \qquad 0_{p,q} \text{ désignant la matrice nulle à } p \text{ lignes et } q \text{ colonnes.}$$

5. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n et de r. Montrer que : $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant \dfrac{n^2}{2}$.

Partie III. Commutant d'un endomorphisme u vérifiant la relation (1) :

(1) $$(u - Id) \circ (u - 2Id)^2 = 0.$$

Id désigne l'application identique de E. On rappelle que :

$$(u - 2Id)^2 = (u - 2Id) \circ (u - 2Id).$$

On pose $E_1 = \ker(u - Id)$ et $E_2 = \ker(u - 2Id)^2$, $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$; on suppose de plus $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$.

1. Montrer en rappelant le théorème utilisé que :
$$E = E_1 \oplus E_2.$$
   On note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle
$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)^2}.$$
   En déduire deux polynômes U et V tels que :
$$1 = U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2, \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$
3. Montrer que $p_1 = V(u) \circ (u - 2Id)^2$ et $p_2 = U(u) \circ (u - Id)$.
4. On note $d = p_1 + 2p_2$; montrer que d est diagonalisable.
5. Soit $w = u - d$. Calculer w^2, en déduire que $w = 0$ ou w est nilpotent d'indice 2.
6. Détermination de $\dim \mathcal{C}(u)$.
   (a) Montrer que : $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}(d)$ et $v \in \mathcal{C}(w)$.
   (b) Déterminer les restrictions de w à E_1 et E_2 respectivement. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$Mat(w, \mathcal{B}) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} \end{array} & \end{array}$$
   où N est la matrice de l'endomorphisme induit par $(u - 2Id)$ sur E_2 sur une base de E_2.
   (c) Montrer que le rang de la matrice N est égal à $n_2 - \dim(\ker(u - 2Id))$.

(d) Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$Mat(v,\mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} \end{array} & \end{array}$$

et

$$V_2 N = N V_2.$$

(e) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $N = 0$.

(f) On suppose u non diagonalisable. déterminer $\dim \mathcal{C}(U)$ en fonction de n_1, n_2 et $\dim(\ker(u - 2Id))$.

SUJET 7

CCP PSI 2019

PROBLÈME 1

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur **R** et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur **R** telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I - Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur **R** par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que la fonction f est bien définie sur **R**.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t$.

Q2. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

Q3. En déduire, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la valeur de Γ_p.

Q4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur **R** et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Q5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

On considère la fonction g définie sur **R** par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur **R** et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $g^{(p)}(x)$.

Q7. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\left|g^{(p)}(0)\right| \geq p^{2p}e^{-p}$.

Q8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Partie II - Le théorème de Borel

Q9. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q10. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}, \psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée p-ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q12. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a :

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n!a_n^2 x^2}.$$

Q14. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, tout entier $n \geq p$ et tout réel x, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q15. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, $u_n^{(p)}(0) = 0$ et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q17. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

Q18. Montrer que $U(0) = a_0$ et pour tout entier $p \geq 1$, $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

Q19. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbf{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.
Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e siècle.

SUJET 8

CCP PSI 2019

PROBLÈME 2

Notations et définitions

- Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée.
- $\mathbf{M}_p(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$. $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$.
- On note I_p la matrice identité de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ et 0_p la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ ne comportant que des 0.
- On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$.
- Étant donnée une matrice $M \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Objectifs

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

Partie I - Éléments propres d'une matrice

I.1 - Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})}\}$.

Q20. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

Q21. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q22. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.

Q23. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$

Q24. En utilisant la question **Q23**, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q25. Établir, pour $n \geq 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}, \chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
En déduire, pour $n \geq 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

Q26. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0,\pi[$:

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q27. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1,n]\!]\right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1,n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

Q28. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0 \\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \quad \forall k \in [\![2,n-1]\!] \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n = 0 \end{cases}.$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)\,u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q29. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont on précisera la dimension.

Q30. Déterminer l'ensemble E des suites $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q31. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

Q32. En déduire, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II - Système différentiel

II.1 - Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telles que C et D commutent.

Q33. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC). \tag{1}$$

Q34. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

Q35. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $p \geq p_0$, $D + \dfrac{1}{p} I_n$ est inversible.

Q36. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

Q37. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbf{C}\,;\, \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

Q38. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.

Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu\, x \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q39. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.2 - Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'' & = & -2x_1 + x_2 \\ x_2'' & = & x_1 - 2x_2 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Q40. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha,\beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R})$.

Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

Q41. En utilisant la question **Q37**, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Q42. En utilisant la question **Q38**, déterminer une matrice inversible $P \in \mathbf{M}_4(\mathbf{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

Q43. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

Q44. Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions intiales $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0)$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1154 – D'après documents fournis

EPITA 2002

ÉPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES 1

Dans ce problème, on désigne par E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On dira qu'un endomorphisme f de E est *cyclique* s'il existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$E = \text{Vect}\ \big(f(^k(x_0) \mid k \in \mathbb{N})\big) \text{ ou encore } E = \text{Vect}\ \big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots\big).$$

Dans la partie I, on donne quelques exemples d'endomorphismes cycliques. Dans la partie II, on procède à une étude plus générale des endomorphismes cycliques.

PARTIE I

1 ˚) Deux exemples d'endomorphismes cycliques en dimension $n = 3$

Dans cette question seulement, l'espace E est de dimension 3 et rapporté à une base (e_1, e_2, e_3).

a) On considère l'endomorphisme a dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exprimer $a(e_1)$ et $a^2(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et en déduire que a est cyclique.

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme a.

Pour chacune des trois valeurs propres possibles, déterminer un vecteur propre dont la troisième composante est égale à 1. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale qu'on explicitera.

b) On considère l'endomorphisme b dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exprimer $b(e_1)$ et $b^2(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et en déduire que b est cyclique.

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme b.

Étudier si l'endomorphisme b est ou non diagonalisable.

2 ˚) Un exemple d'endomorphisme cyclique en dimension n

Dans cette question, on note c un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs propres associés à ces n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on pose alors $x_0 = x_1 + \ldots + x_n$

a) Exprimer $c(x_1 + \ldots + x_n)$, $c^2(x_1 + \ldots + x_n)$, …, $c^n(x_1 + \ldots + x_n)$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, puis établir que la famille $(x_0, c(x_0), \ldots, c^{n-1}(x_0))$ est libre dans E.

b) En déduire que l'endomorphisme c est cyclique.

PARTIE II

Dans cette partie II, on note f un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E ($\dim E = n$), autrement dit un endomorphisme f pour lequel existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$E = \text{Vect}\ \big(f(^k(x_0) \mid k \in \mathbb{N})\big) \text{ ou encore } E = \text{Vect}\ \big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots\big).$$

Si $Q(X) = q_m X^m + q_{m-1} X^{m-1} + \ldots + q_1 X + q_0$ désigne un polynôme de $K[X]$, on pose :

$$Q(f) = q_m f^m + q_{m-1} f^{m-1} + \ldots + q_1 f + q_0 Id \text{ } (Id \text{ endomorphisme identité de } E).$$

3°) Une base adaptée de E

On désigne par m le plus grand nombre entier naturel tel que :

$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^m(x_0))$ est liée.

a) Justifier l'existence d'un tel nombre entier naturel m, puis montrer par récurrence sur k que les vecteurs $f^{m+k}(x_0)$ appartiennent à Vect $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\right)$.

b) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est une base de E, puis que $m = n$.

Dans toute la suite de ce problème, on convient de poser :

$$f^n(x_0) = p_{n-1}f^{n-1}(x_0) + \ldots + p_1 f(x_0) + p_0 x_0$$

et on désigne alors par P le polynôme de $K[X]$ défini par $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \ldots - p_1 X - p_0$.

4°) Matrice et polynôme annulateur de f

a) Écrire la matrice M de f dans la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.

b) Montrer que les n endomorphismes Id, f, f^2, $\ldots$, f^{n-1} sont indépendants, puis en déduire qu'il n'existe aucun polynôme Q non nul de degré strictement inférieur à n tel que $Q(f) = 0$.

c) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(f) = f^n - p_{n-1}f^{n-1} - \ldots - p_1 f - p_0 Id$ des vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$, puis en déduire que $P(f) = 0$.

5°) Caractérisation des endomorphismes cycliques diagonalisables

a) On considère une valeur propre λ de f et un vecteur propre associé x.
Calculer $f^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que $P(\lambda) = 0$.

b) On considère une valeur propre λ de f. Déterminer le rang de l'endomorphisme $f - \lambda Id$ à l'aide de sa matrice, puis en déduire la dimension du sous-espace propre associé à λ.

c) Établir que l'endomorphisme cyclique f est diagonalisable si et seulement s'il possède n valeurs propres distinctes.

6°) Étude du commutant de f lorsque f est cyclique

a) Montrer que le commutant $C(f) = \{g \in L(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $L(E)$.

b) Soient deux endomorphismes u et v appartenant à $C(f)$.
Montrer, si $u(x_0) = v(x_0)$, que $u = v$.

c) Soit g un endomorphisme pour lequel on pose $g(x_0) = a_{n-1}f^{n-1}(x_0) + \ldots + a_1 f(x_0) + a_0 x_0$.
En déduire, si g appartient à $C(f)$, que $g = a_{n-1}f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0 Id$.

d) En déduire que le commutant $C(f)$ est de dimension n et démontrer qu'il admet pour base $(Id, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.

E.P.I.T.A. 2015 épreuve commune

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2, par $\mathcal{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on fait les conventions suivantes :

- on identifie tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ et la matrice-colonne de ses composantes $x_1, \ldots, x_n$, et on définit la norme de ce vecteur x par :
$$\|x\|_\infty = \max(|x_i| \,/\, 1 \leq i \leq n).$$
En particulier, on note v_1 le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.
- on identifie tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est associée dans la base canonique, et on définit la norme de cette matrice $A = \left(a_{i\,j}\right)$ par :
$$\|A\|_\infty = \max\left(\left|a_{i\,j}\right| \,/\, 1 \leq i,\, j \leq n\right).$$

On notera qu'une suite $k \longrightarrow A_k = \left(a_{i\,j}^{(k)}\right)$ de matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge donc vers une matrice $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $k \longrightarrow \|A_k - A\|_\infty$ tend vers 0, donc si et seulement si les n^2 suites $k \longrightarrow a_{i\,j}^{(k)}$ des coefficients des matrices A_k convergent respectivement vers les n^2 coefficients $a_{i\,j}$ de la matrice A.

Enfin, on désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices dites *stochastiques* d'ordre n, c'est à dire l'ensemble des matrices $M = \left(m_{i\,j}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) les n^2 coefficients $m_{i\,j}$ de la matrice M sont des nombres réels positifs.
2) la somme des éléments de chacune des n lignes de la matrice M vaut 1 :
$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad m_{i\,1} + m_{i\,2} + \ \ldots\ + m_{i\,n} = 1.$$

Ces matrices stochastiques jouent un rôle important, en particulier en calcul des probabilités comme le montre l'exemple traité dans la partie I. Dans la partie II, qui est indépendante, on étudie plus généralement la suite des puissances d'une matrice stochastique $M \in \mathcal{S}_n$.

■ Partie I : une intervention des matrices stochastiques en probabilités

On considère un combat entre deux tireurs A et B qui se déroule en une suite d'épreuves où A et B tirent simultanément l'un sur l'autre de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins un des deux tireurs :

- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
- Lorsqu'un tireur est atteint, il est définivement éliminé des épreuves suivantes.
- Les résultats des différents tirs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

- AB_n: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés".
- A_n: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, seul A n'est pas encore éliminé".
- B_n: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, seul B n'est pas encore éliminé".
- $\emptyset_n$: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, les deux tireurs sont éliminés".

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n la matrice-ligne à 4 colonnes dont les éléments successifs sont les probabilités des 4 événements AB_n, A_n, B_n, $\emptyset_n$:

$$E_n = (\mathbb{P}(AB_n), \mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(\emptyset_n)).$$

Pour $n = 0$, comme A et B sont présents au début du combat, on convient donc de poser :

$$E_0 = (\mathbb{P}(AB_0), \mathbb{P}(A_0), \mathbb{P}(B_0), \mathbb{P}(\emptyset_0)) = (1,\ 0,\ 0,\ 0).$$

1°) *Calculs de probabilités conditionnelles*

a) Vérifier que $\mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1}) = \frac{2}{9}$ (on justifiera cette réponse).

b) Déterminer (en le justifiant) $\mathbb{P}_{AB_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{AB_n}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{AB_n}(\emptyset_{n+1})$.

c) Rappeler la formule des probabilités totales, puis en l'appliquant à un système complet d'événements correctement choisi, expliciter une matrice carrée M d'ordre 4 telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad E_{n+1} = E_n\, M.$$

Vérifier que la matrice M ainsi obtenue est stochastique d'ordre 4, et que $E_n = E_0\, M^n$.

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

a) Préciser les valeurs propres de la matrice M avec leurs ordres de multiplicité.

b) Etablir que la matrice M est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres de M.

c) On considère 3 réels x, y, z et la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer x, y, z pour que les vecteurs-colonnes de P soient des vecteurs propres de M.

d) Vérifier que P est inversible, préciser la matrice $D = P^{-1}\, M\, P$ et expliciter P^{-1}.

3°) *Probabilités pour que A ou B remportent le combat*

a) Expliciter la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite matricielle $n \longrightarrow D^n$.
Exprimer M^n en fonction de D^n, et expliciter la limite de la suite matricielle $n \longrightarrow M^n$.

b) En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite matricielle $n \longrightarrow E_n$, puis préciser les probabilités pour que A ou B remportent le combat.

4°) *Durée moyenne du combat*

Soit T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves réalisées avant la fin du combat.

a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(T = 1)$.

b) Pour tout entier naturel n, comparer les événements $AB_1 \cap AB_2 \cap \ldots \cap AB_n$ et $T \geq n$.
En déduire la probabilité $\mathbb{P}(T > n)$, puis vérifier que $\mathbb{P}(T = n) = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$.

c) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$ et l'espérance de la variable aléatoire T.

■ Partie II : étude des puissances des matrices stochastiques

Dans toute cette partie, on désigne par M une matrice stochastique d'ordre n et on se propose d'étudier la convergence de la suite géométrique $k \longrightarrow M^k$, et plus généralement de la suite de ses moyennes de Cesaro $k \longrightarrow C_k$, définies par $C_k = \frac{I_n + M + M^2 + \ldots + M^k}{k+1}$.

5°) *Premiers résultats de convergence*
a) Etablir que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices stochastiques est stable par produit.
b) Etablir que la limite éventuelle d'une suite de matrices stochastiques est stochastique.
c) Démontrer, si la suite (M^k) converge vers L, que L est une matrice de projection.
(On pourra à cet effet déterminer de deux manières la limite de la suite (M^{2k})).
d) Démontrer, si la suite (M^k) converge vers L, que la suite (C_k) converge aussi vers L.

6°) *L'espace* $\mathbb{C}^n$ *est somme directe de* $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ *et de* $\mathrm{Im}(M - I_n)$
a) Déterminer Mv_1 et en déduire que 1 est valeur propre de M.
b) Etablir l'inégalité $\|Mx\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$.
En déduire que toute valeur propre λ de M est de module inférieur ou égal à 1.
Quelles inégalités en déduit-on sur le déterminant et la trace de M ?
Celles-ci peuvent-elles être réalisées?
c) On considère un vecteur $y = Mx - x$ appartenant à $\mathrm{Im}(M - I_n)$.
Etablir, si de plus $y \in \mathrm{Ker}(M - I_n)$, que $M^k x = ky + x$, puis que $\|y\|_\infty \leq \frac{2}{k} \|x\|_\infty$.
d) En déduire que y est nul, puis que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(M - I_n) \oplus \mathrm{Im}(M - I_n)$.

Dans toute la suite du problème, on convient de désigner par P la matrice du projecteur sur le sous-espace $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction de son supplémentaire $\mathrm{Im}(M - I_n)$.

7°) *Etude de la convergence de la suite* $k \longrightarrow C_k$
a) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sur la somme directe $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(M - I_n) \oplus \mathrm{Im}(M - I_n)$ en posant $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = Px \in \mathrm{Ker}(M - I_n)$ et $x_2 = Mz - z \in \mathrm{Im}(M - I_n)$.
Donner l'expression de $C_k x$ et montrer que $\|C_k x - Px\|_\infty \leq \frac{2\|z\|_\infty}{k+1}$.
b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\lim_{k \to +\infty} C_k x = Px$, puis que : $\lim_{k \to +\infty} C_k = P$.
c) En déduire la limite de la suite (M^k) lorsque celle-ci est convergente.

8°) *Etude de la convergence de la suite* $k \longrightarrow M^k$
On suppose la matrice M diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, et on fait l'hypothèse supplémentaire suivante : pour $2 \leq i \leq p$, on a $|\lambda_i| < 1$.
a) Etablir, si x est un vecteur propre de M associé à une valeur propre λ distincte de 1, qu'on a l'égalité : $(\lambda - 1)x = (M - I_n)x$.
En déduire, si λ est une valeur propre distincte de 1, que : $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$.
b) Etablir l'inclusion : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_n) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_n)) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$, et montrer qu'on a l'égalité : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_n) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_n)) = \mathrm{Im}(M - I_n)$.
c) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sur la somme directe des sous-espaces propres de M en posant $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$ avec $x_i \in \mathrm{Ker}(M - \lambda_i I_n)$ pour $1 \leq i \leq p$.
Montrer que $x_1 = Px$, exprimer $M^k x - Px$ à l'aide de k, de $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, de $x_2, \dots, x_p$, puis en déduire que $\lim_{k \to +\infty} M^k x = Px$, puis que $\lim_{k \to +\infty} M^k = P$.
d) Donner enfin l'exemple d'une matrice stochastique M telle que la suite $k \longrightarrow M^k$ diverge.