SUJET 1

Centrale PSI I 2006

corrigés sur
https://prepas.org/index.php?module=Sujets

Notations et définitions

$\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et L^1 l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in L^1$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$.

On note B l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in B$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f|$.

Si $\alpha \in [1,+\infty[$, on convient que $0^\alpha = 0$; ainsi $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^\alpha$ est continue.

On pose, lorsque cela a un sens, $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Si $\alpha \in [1,+\infty[$ et h est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on note $E_{\alpha,h}$ l'équation différentielle linéaire :

$$(E_{\alpha,h})\ :\ y'' - \frac{1}{1+t^\alpha}\,y' + y = h$$

Par définition, une solution de $(E_{\alpha,h})$ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de la variable t de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E_{\alpha,h})$.

Pour une équation différentielle linéaire du second ordre (E), de second membre h, on définit les propriétés de stabilité suivantes :

- on dira que (E) est **stable par rapport aux conditions initiales** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si f est une solution de (E) vérifiant $\|(f(0), f'(0))\| \leqslant \eta$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens 1** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in L^1$ est tel que $\|h\|_1 \leqslant \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens ∞** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in B$ est tel que $\|h\|_\infty \leqslant \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

De plus, dans le cas de l'équation $(E_{\alpha,0})$:

- on dira que $(E_{\alpha,0})$ est **stable par rapport au paramètre** si et seulement si pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
  si $\beta \in [1,+\infty[$ vérifie $|\alpha - \beta| \leqslant \eta$, f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et g est solution de $(E_{\beta,0})$ avec $\big(f(0), f'(0)\big) = (g(0), g'(0)) = (a,b)$, alors $f-g \in B$ et $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Objectifs et dépendance des parties

L'objectif du problème est d'étudier le comportement des solutions de $(E_{\alpha,0})$ vers $+\infty$, ainsi que les différentes notions de stabilité.

La partie **I** étudie le cas de l'équation « limite à l'infini » $y'' + y = h$.

La partie **II**, indépendante de **I**, étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

La partie **III**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha > 1$, utilise des résultats de **II.A**, **II.C** et **I.5**.

La partie **IV**, qui étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{1,0})$, utilise **II.B**.

La partie **V**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha = 1$, utilise les parties **IV** et **II**.

Partie I - Étude de l'équation $y'' + y = h$

Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, on note (F_h) l'équation différentielle $y'' + y = h$. Par définition, une solution de (F_h) est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (F_h).

I.A -

I.A.1) Donner l'ensemble des solutions de (F_0).

I.A.2) Dans cette question uniquement, on prend pour $h : x \mapsto \cos(x)$.

Donner l'ensemble des solutions de (F_h) dans ce cas.

I.A.3) Dans cette question uniquement, on prend pour h la fonction 2π-periodique sur $\mathbb{R}^+$, définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer l'ensemble des solutions de (F_h).

I.B - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et f est la solution de (F_0) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a, b)$, montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \|(a, b)\|$.

I.C - Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, montrer que $f_0 : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(\displaystyle\int_0^t h(u) \sin(t-u)\,\mathrm{d}u\right)$ est solution de (F_h), et en déduire l'ensemble des solutions de (F_h).

I.D - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

On donne $h \in L^1$.
Déterminer la solution f de (F_h) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0, 0)$, montrer que $f \in B$, et $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|h\|_1$.
En déduire que (F_h) est stable par rapport au second membre au sens 1.

I.E - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.
Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \delta \cos(t)$, et montrer que ses solutions sont non bornées, et plus précisement, ne sont pas en $o(t)$ quand $t \to +\infty$.

En déduire la non stabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞.

Partie II - Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$

II.A - Démontrer l'existence de $I(\alpha)$, pour $\alpha > 1$, et sa continuité par rapport à α.

II.B - Relèvement angulaire

On donne $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$.

II.B.1) Justifier l'existence d'une primitive A de $\dfrac{g'}{g}$, et montrer que $g\mathrm{e}^{-A}$ est constante.

II.B.2) En écrivant la fonction A sous la forme $A = B + \mathrm{i}C$, où B et C sont des fonctions à valeurs réelles, justifier qu'existent $r \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ tels que $g = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

II.C - Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$ et f une solution non nulle de $(E_{\alpha,0})$. On note $q : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}\cdot$

II.C.1) En appliquant II.B, montrer qu'existent $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ telles que $f = r\cos(\theta)$ et $f' = r\sin(\theta)$.
Exprimer r en fonction de f et f'.

Les fonctions r et θ sont fixées ainsi pour la suite de la partie.

II.C.2) Démontrer que $\theta' = -1 + q\sin(\theta)\cos(\theta)$. (1)

II.C.3) Démontrer que $r' = qr\sin^2(\theta)$. (2)

II.C.4) Démontrer que r a une limite strictement positive en $+\infty$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} r \leqslant r(0)\exp(I(\alpha))$.
Démontrer que f et f' sont bornées par $\|\big(f(0), f'(0)\big)\| \exp(I(\alpha))$.

II.C.5) Démontrer que $\theta(t) + t$ tend vers une limite réelle quand $t \to +\infty$.

II.C.6) Démontrer qu'existent $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) - a\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

II.C.7) Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie III - Étude de la stabilité pour $\alpha > 1$

Dans toute la partie, $\alpha > 1$, et (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(E_{\alpha,0})$.
$w = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ *est le wronskien associé.*
On pensera à utiliser les résultats de **II**.

III.A - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

III.B - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

III.B.1) Déterminer une équation différentielle vérifiée par w, et montrer qu'existent a, b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < a \leqslant |w(x)| \leqslant b$.

III.B.2) Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, montrer que les solutions de $(E_{\alpha,h})$ sont les fonctions du type $f = -C_1 f_1 + C_2 f_2$, où C_1 est une primitive de $\dfrac{hf_2}{w}$ et C_2 une primitive de $\dfrac{hf_1}{w}\cdot$

III.B.3) Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes requises sur C_1 et C_2 dans la question précédente pour avoir $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$?

III.B.4) Démontrer l'existence de $C \in \mathbb{R}^+$ telle que : pour tout $h \in L^1$, la solution f de $(E_{\alpha,h})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$ est dans B, et $\|f\|_\infty \leqslant C\|h\|_1$. En déduire que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au second membre au sens 1.

III.C - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit g une solution de $y'' + y = \lambda\cos(t)$.
Soit f la solution sur $\mathbb{R}^+$ de $y'' - \dfrac{1}{1+t^\alpha}y' + y = \lambda\cos(t)$ telle que $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$. On pose $\Phi = f - g$.

III.C.1) Démontrer que Φ est solution de $(E_{\alpha,h})$, pour une fonction $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ vérifiant $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

III.C.2) Démontrer que $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ implique que $\displaystyle\int_0^t |h| \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

III.C.3) Utilisant la résolution de $(E_{\alpha,h})$ vue en III.B, montrer que $\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

III.C.4) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ n'est pas stable par rapport au second membre au sens ∞.

III.D - Stabilité par rapport au paramètre

On fixe pour la suite de la question $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $\beta \in]1, +\infty[$.
Soit f la solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a,b)$, g la solution de $(E_{\beta,0})$ vérifiant $(g(0), g'(0)) = (a,b)$.
On pose $\Phi = f - g$.

Si $\lambda > 1$, on pose $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$ et $K(\lambda) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$.

Comme pour I, les fonctions J et K sont bien définies et continues sur $]1, +\infty[$ (on ne demande pas de le montrer).

III.D.1) Démontrer que Φ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,h})$ avec

$$h : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha}\right) g'(t)$$

III.D.2) Démontrer que $h \in L^1$ et

$$\|h\|_1 \leqslant \|(a,b)\| \, \mathrm{e}^{I(\beta)} \Big(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \Big).$$

III.D.3) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV - Étude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$

f est une solution non nulle de $(E_{1,0})$.

On pose $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t+1}}$.

IV.A - Établir que pour tout $t \geqslant 0$, $g''(t) + \left(1 - \dfrac{3}{4(t+1)^2}\right) g(t) = 0$.

IV.B - Démontrer qu'existent $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ telles que $g = \rho \cos(\beta)$ et $g' = \rho \sin(\beta)$.

IV.C - Déterminer une équation différentielle vérifiée par β et montrer que $\beta(x) + x$ tend vers une limite réelle lorsque $x \to +\infty$.

IV.D - Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ, et démontrer que ρ tend vers une limite réelle $a > 0$ en $+\infty$.

IV.E - Démontrer qu'il existe un réel b tel que $f(t) - a\sqrt{t}\cos(t+b) \underset{t \to +\infty}{=} o(\sqrt{t})$, où a est le réel défini ci-dessus.

IV.F - Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie V - Étude de la stabilité pour $\alpha = 1$

V.A - Démontrer que $(E_{1,0})$ n'est pas stable par rapport aux conditions initiales et au paramètre.

V.B - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f_\lambda : x \mapsto \lambda x \sin(x)$, calculer $f_\lambda''(x) - \dfrac{1}{1+x} f_\lambda'(x) + f_\lambda(x)$.

Qu'en déduire concernant la stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞ ?

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

MP

2017

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures   Calculatrices autorisées

Ce problème a pour objet la représentation de la loi d'une variable aléatoire comme loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

On s'intéresse d'abord au cas d'une somme de deux variables à valeurs entières, puis au cas de variables aléatoires dont la loi est celle de la somme d'un nombre quelconque de variables indépendantes de même loi.

Notations

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont discrètes. On note $\mathbb{P}_X$ la loi d'une variable aléatoire X.

Si X et X' sont deux variables aléatoires définies sur les espaces probabilisés respectifs $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, la notation $X \sim X'$ signifie que X et X' ont même loi, c'est-à-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice, définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$$

lorsque la série converge.

On pourra si nécessaire utiliser librement le résultat suivant.

> Si $m \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathcal{L}$ est une loi de probabilité sur un espace probabilisé Ω_1, alors il existe des variables aléatoires $X_1, ..., X_m$, définies sur un espace probabilisé Ω_m, mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{L}$.

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on désigne par $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

I Variables aléatoires entières décomposables

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *décomposition* de X toute relation de la forme $X \sim Y + Z$ où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé pouvant être distinct de celui sur lequel X est définie.

On dit que X est *décomposable* si X admet une décomposition où Y et Z ne sont pas constantes presque sûrement.

I.A – *Premiers exemples*

I.A.1) Soit X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier que $X \sim X'$ si et seulement si $G_X = G_{X'}$.

I.A.2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une décomposition $X \sim Y + Z$, où Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quelle relation lie G_X, G_Y et G_Z ?

I.A.3) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$. Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geqslant 2$.

I.A.4) Soit $A(T) \in \mathbb{R}[T]$ le polynôme : $A(T) = T^4 + 2T + 1$.

a) Soit $U(T)$ et $V(T)$ deux polynômes à coefficients réels positifs ou nuls tels que $U(T)V(T) = A(T)$. Montrer que l'un des polynômes $U(T)$ ou $V(T)$ est constant.

> On pourra distinguer les cas selon les valeurs des degrés de $U(T)$ et $V(T)$.

b) En déduire qu'il existe une variable aléatoire décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.

> On pourra considérer le polynôme $\frac{1}{4}A(T)$.

I.B – *Variables uniformes*

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \text{ si } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = 0 \text{ sinon}$$

I.B.1) Variables uniformes décomposables

On suppose dans cette question que n n'est pas premier : il existe des entiers a et b, supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = ab$.

a) Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires entières (Q, R) définies sur Ω telles que

$$X = aQ + R \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega,\ R(\omega) \in [\![0, a-1]\!]$$

On pourra considérer une division euclidienne.

b) Préciser la loi de (Q, R), puis les lois de Q et de R.

c) Montrer que X est décomposable. En déduire une expression de G_X comme produit de deux polynômes non constants que l'on précisera.

I.B.2) Variables uniformes non décomposables

On suppose dans cette question que n est un nombre premier et on établit que X n'est pas décomposable.

a) Montrer qu'il suffit de prouver le résultat suivant : si U et V sont des polynômes de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que $U(T)V(T) = 1 + T + \cdots + T^{n-1}$, alors l'un des deux polynômes U ou V est constant.

Dans ce qui suit, on fixe des polynômes U et V de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que

$$U(T)V(T) = 1 + T + \cdots + T^{n-1}$$

On pose $r = \deg U$ et $s = \deg V$ et on suppose par l'absurde que r et s sont non nuls.

b) Montrer que $U(T) = T^r U\left(\dfrac{1}{T}\right)$ et $V(T) = T^s V\left(\dfrac{1}{T}\right)$.

On note alors $U(T) = 1 + u_1 T + \cdots + u_{r-1}T^{r-1} + T^r$ et $V(T) = 1 + v_1 T + \cdots + v_{s-1}T^{s-1} + T^s$ avec $r \leqslant s$ (quitte à échanger les rôles de U et V).

c) Montrer que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $u_k v_k = 0$.

d) En déduire que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$.

e) Conclure.

On pourra d'abord montrer que tous les coefficients de V sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

II Variables infiniment divisibles : exemples

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est *infiniment divisible* si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires réelles discrètes $X_{m,1}, \ldots, X_{m,m}$ mutuellement indépendantes, de même loi, et vérifiant $X \sim X_{m,1} + \cdots + X_{m,m}$. Dans cette définition, l'espace probabilisé Ω_m sur lequel sont définies les $X_{m,i}$ peut dépendre de m.

II.A – Variables bornées

II.A.1) On suppose que X est constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Montrer que X est infiniment divisible.

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que toute variable aléatoire bornée infiniment divisible est presque sûrement constante.

Soit X une variable aléatoire bornée infiniment divisible définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M = \sup_\Omega |X|$, de sorte que $|X(\omega)| \leqslant M$ pour tout $\omega \in \Omega$.

II.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et telles que $X_1 + \cdots + X_n$ ait même loi que X.

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que $X_i \leqslant \dfrac{M}{n}$ presque sûrement, puis $|X_i| \leqslant \dfrac{M}{n}$ presque sûrement.

b) En déduire que $\mathbb{V}(X) \leqslant \dfrac{M^2}{n}$, où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de X.

II.A.3) Conclure que X est presque sûrement constante.

II.B – Étude du caractère infiniment divisible de quelques variables entières

II.B.1) Une variable binomiale est-elle infiniment divisible ?

II.B.2) Soit n un entier naturel non nul et soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

II.B.3) Soit X une variable aléatoire de Poisson. Montrer que X est infiniment divisible.

II.B.4) Soit r un entier naturel non nul et soit $X_1, \ldots, X_r$ des variables aléatoires de Poisson mutuellement indépendantes. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} iX_i$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

II.C – Séries de variables aléatoires à valeurs entières

II.C.1) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si A et B sont des événements de $\mathcal{A}$, et si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont leurs événements contraires respectifs, alors

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leqslant \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

b) En déduire que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leqslant 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

II.C.2) Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série des $\mathbb{P}(U_i \neq 0)$ soit convergente.

a) Soit $Z_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \geqslant n, U_i(\omega) \neq 0\}$. Montrer que (Z_n) est une suite décroissante d'événements et que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

b) En déduire que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

c) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ et $S = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$. Justifier que S est définie presque sûrement. Montrer que G_{S_n} converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$.

II.C.3) Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum \lambda_i$ est convergente, et on note $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i, X_i suive une loi de Poisson de paramètre λ_i. On convient que, si $\lambda_i = 0$, X_i est la variable aléatoire nulle.

a) Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ est convergente.

b) Montrer que la série $\sum_{i \geqslant 1} X_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme (définie presque sûrement) suit une loi de Poisson de paramètre λ.

c) Montrer que la série $\sum_{i \geqslant 1} iX_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme $X = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$ définit une variable aléatoire infiniment divisible.

III Variables entières infiniment divisibles : étude générale

III.A – Série entière auxiliaire

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

III.A.1) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X = k - j)$$

III.A.2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer

$$|\lambda_k| \mathbb{P}(X = 0) \leqslant \mathbb{P}(X = k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \mathbb{P}(X = k - j) \leqslant (1 - \mathbb{P}(X = 0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right)$$

III.A.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer : $1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \frac{1}{\mathbb{P}(X = 0)^k}$.

III.A.4) Montrer que la série entière $\sum \lambda_k t^k$ a un rayon de convergence $\rho(X)$ supérieur ou égal à $\mathbb{P}(X = 0)$.

Pour tout réel t de $]-\rho(X), \rho(X)[$, on pose

$$H_X(t) = \ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t^k$$

À toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, on associe ainsi une série entière H_X. Dans la suite du problème, H_X sera appelée *série entière auxiliaire* de X.

III.A.5) Pour $t \in]-\rho(X), \rho(X)[$, montrer $G'_X(t) = H'_X(t) G_X(t)$, puis $G_X(t) = \exp(H_X(t))$.

III.A.6) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit H_X et H_Y leurs séries entières auxiliaires. Montrer $H_{X+Y}(t) = H_X(t) + H_Y(t)$ pour tout réel t vérifiant $|t| < \min(\rho(X), \rho(Y))$.

III.B – Variables aléatoires entières λ-positives

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$, et soit H_X sa série entière auxiliaire :

$$H_X(t) = \ln(\mathbb{P}(X=0)) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t^k$$

On dira que X est λ-*positive* si $\lambda_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

On suppose dans cette sous-partie que X est λ-positive.

III.B.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\lambda_k \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$. En déduire que la série $\sum \lambda_k$ converge.

III.B.2) Montrer que, pour tout $t \in [-1,1]$, $G_X(t) = \exp(H_X(t))$ et que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(X=0))$.

III.B.3) Soit (X_i) la suite de variables aléatoires définie au II.C.3. Montrer que $X \sim \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$.

III.C – Caractérisation des variables entières infiniment divisibles

Soit X une variable aléatoire infiniment divisible à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$.

Le but de cette sous-partie est de montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(i) X est infiniment divisible ;

(ii) X est λ-positive ;

(iii) il existe une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables de Poisson indépendantes, comme au II.C.3, telle que $X \sim \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$.

Dans les questions III.C.1 à III.C.4, on suppose que X est une variable aléatoire infiniment divisible à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X=0)>0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc n variables aléatoires indépendantes $X_{n,1},\ldots,X_{n,n}$ de même loi telles que la variable aléatoire $X_{n,1}+\cdots+X_{n,n}$ suive la loi de X.

III.C.1)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $X_{n,1}$ est presque sûrement positive ou nulle.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X_{n,1}=0)>0$.

c) Montrer que les variables aléatoires $X_{n,i}$ sont presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

III.C.2)

a) Montrer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{n,1}=0)=1$.

b) En déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{n,1}=i)=0$.

III.C.3) Soit H_X la série entière auxiliaire de X, comme elle est définie à la question III.A.4, et soit $\rho(X)$ son rayon de convergence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit H_n la série entière auxiliaire de $X_{n,1}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $nH_n = H_X$.

b) En déduire, pour tous n et k dans $\mathbb{N}^*$

$$kn\mathbb{P}(X_{n,1}=k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1}=k-j)$$

III.C.4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $\big(n\mathbb{P}(X_{n,1}=k)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers λ_k. En déduire que X est λ-positive.

III.C.5) Conclusion

a) Montrer le résultat annoncé au début de cette sous-partie III.C.

b) Comment adapter ce résultat aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$?

c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$$

La variable aléatoire X est-elle infiniment divisible ?

• • • FIN • • •

SUJET 3

Mines MP 2013 II

Quelques propriétés géométriques du groupe orthogonal

Notations et définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle\, ,\, \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E, on appelle *enveloppe convexe de* H, notée $\mathrm{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A. On rappelle que le *groupe orthogonal* $O_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U\,{}^tU = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. On note $\|\ \|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X\in\mathbb{R}^n,\, \|X\|=1} \|AX\|.$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i\rangle$.

2) Montrer que l'application $(A, B) \to \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\langle\, ,\, \rangle$.

On note $\|\ \|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est désormais muni de deux normes différentes* $\|\ \|_1$ *et* $\|\ \|_2$.

3) Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B\rangle \geqslant 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E, et on note f^* l'adjoint de f.

4) Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de ${}^tAA$.

5) Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.

6) Montrer que la restriction de h à $\operatorname{Im} h$ induit un automorphisme de $\operatorname{Im} h$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.

7) Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\operatorname{Ker} h$ et $(\operatorname{Im} f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\operatorname{Ker} h$ sur $(\operatorname{Im} f)^\perp$ qui conserve la norme.

8) À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.

9) En déduire que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$$

10) Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

11) Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leqslant 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction $q(t)$ qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de x sur H.

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une *combinaison convexe* des p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

12) Montrer que l'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'*au plus* $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \ldots, x_p \in H$ avec $p \geqslant n+2$.

13) Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$.

14) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\operatorname{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15) Si H est une partie compacte de E, montrer que $\operatorname{conv}(H)$ est compacte.
On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \ldots, t_{n+1}),\ \text{avec } t_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}.$$

E. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16) Montrer que l'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathscr{B}$ la boule unité fermée de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$.

17) Montrer que $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathscr{B}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathscr{B}$ telle que M n'appartient pas à $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C pour la norme $\|\ \|_1$, et on pose $A = {}^t(M - N)$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question 9).

18) Montrer que pour tout $V \in \operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\operatorname{tr}(AV) \leqslant \operatorname{tr}(AN) < \operatorname{tr}(AM)$. En déduire que $\operatorname{tr}(S) < \operatorname{tr}(USM)$.

19) Montrer que $\operatorname{tr}(MUS) \leqslant \operatorname{tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1).

20) Conclure : déterminer $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

F. Points extrémaux

Un élément $A \in \mathscr{B}$ est dit *extrémal* dans $\mathscr{B}$ si l'écriture $A = \dfrac{1}{2}(B+C)$, avec B, C appartenant à $\mathscr{B}$, entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{B}$.

21) On suppose que $U \in O_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \dfrac{1}{2}(V+W)$, avec V, W appartenant à $\mathscr{B}$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathscr{B}$.

Soit A appartenant à $\mathscr{B}$ mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$.

22) Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont positifs ou nuls.

23) Montrer que $d_i \leqslant 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et qu'il existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $d_j < 1$.

24) En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à $\mathscr{B}$ telles que $A = \dfrac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.

FIN DU PROBLÈME

SUJET 4

Mines MP I 2013

Applications bilinéaires symétriques plates

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et p est un entier supérieur ou égal à 1. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs produits scalaires canoniques, notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$; en particulier pour $p = 1$, c'est le produit usuel dans $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'une application φ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est *bilinéaire* lorsque pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, les deux applications partielles $z \mapsto \varphi(z, y)$ et $z \mapsto \varphi(x, z)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ sont linéaires. L'application bilinéaire φ est dite *symétrique* si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, lorsque $p = 1$, on dit que φ est une *forme* bilinéaire symétrique.

Soit φ une application bilinéaire symétrique. On appelle *noyau* de φ et on note $\operatorname{Ker}\varphi$ l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x, y) = 0$. On dit que φ est *diagonalisable* s'il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$. Enfin, on dit que φ est *plate* (relativement au produit scalaire de $\mathbb{R}^p$) si pour tous les vecteurs x, y, z, w de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle \varphi(x, y), \varphi(z, w) \rangle = \langle \varphi(x, w), \varphi(z, y) \rangle.$$

Le but du problème est d'établir, sous certaines conditions, qu'une application bilinéaire symétrique plate est diagonalisable.

Les parties A, B et C sont indépendantes les unes des autres.

A. Formes bilinéaires symétriques plates

Dans toute cette partie on pose $p = 1$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

1) Justifier qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x, y) = \langle u(x), y \rangle$. Vérifier que u est symétrique et en déduire que φ est diagonalisable.

On note $\mathbb{R}^{n*}$ l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ constitué des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Si a et b sont dans $\mathbb{R}^{n*}$, on définit l'application $a \otimes b$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, en posant $(a \otimes b)(x, y) = a(x)b(y)$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^{n*}$, $a \otimes b$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit symétrique.

On rappelle que le *rang* d'une forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est égal au rang de la matrice $\big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$.

3) On suppose dans cette question que φ est de rang 1. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in \mathbb{R}^{n*}$ telle que $\varphi = \pm f \otimes f$. (On pourra considérer la base duale d'une base qui diagonalise φ.)

4) En déduire qu'une forme bilinéaire symétrique de rang 1 est plate.

5) Réciproquement, soit φ une forme bilinéaire symétrique plate non nulle. Quel est le rang de φ ?

B. Diagonalisation simultanée

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E de dimension n, qui commutent deux à deux : $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous i, j dans I. On se propose de démontrer par récurrence sur n qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous ces endomorphismes. Le résultat étant évident pour $n = 1$, on suppose que $n > 1$ et que le résultat est vrai pour toute dimension strictement inférieure à n.

6) Soit $i_0 \in I$. Montrer que si u_{i_0} n'est pas une homothétie, les sous-espaces propres de u_{i_0} sont de dimension strictement inférieure à n. Montrer par ailleurs que ces sous-espaces sont stables par tous les endomorphismes u_i.

7) Conclure.

C. Vecteurs réguliers

Soit φ une application bilinéaire symétrique non nulle de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\tilde{\varphi}(x)$ l'application linéaire qui à tout $y \in \mathbb{R}^n$ associe $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^p$. On a donc $\tilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Le noyau et l'image de $\tilde{\varphi}(x)$ sont notés respectivement $\operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(x)$ et $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$.

On note q la dimension maximale de $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}^n$, et on choisit un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ tel que la dimension de $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(v)$ soit égale à q. Un tel vecteur v est qualifié de *régulier* pour φ.

8) Dans cette question préliminaire, on se donne deux matrices carrées A, B d'ordre n à coefficients réels. Montrer que si A *ou* B est inversible, alors $A + tB$ l'est aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$ *sauf* éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

9) Soit r un entier naturel non nul et $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Montrer que si $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ est libre, alors $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ est également libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

En particulier $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ sera libre pour tout t dans un voisinage de 0.

10) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(v)$, on a $\varphi(x,y) \in \operatorname{Im}\tilde{\varphi}(v)$. On pourra raisonner par l'absurde en montrant l'existence de vecteurs $e_1,\dots,e_q$ de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille $\big(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q),\varphi(x,y)\big)$ soit libre.

11) Dans cette question, on suppose que φ est *plate*. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(v)$. Si de plus, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, en déduire que $p \geqslant n$.

On revient au cas général où φ est une application bilinéaire symétrique non nulle.

12) Montrer que l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs réguliers pour φ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

13) Montrer que $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

D. Le cas $p = n$ de noyau nul

Dans cette partie, φ désigne une application bilinéaire symétrique plate de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, dont le noyau est réduit à $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. On fixe un vecteur régulier v pour φ.

14) Montrer que $\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit l'endomorphisme $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}$.

15) En utilisant la définition d'une application bilinéaire plate, montrer que $\psi(x)$ est auto-adjoint.

16) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x)\circ\psi(y) = \psi(y)\circ\psi(x)$. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ diagonalisant simultanément tous les endomorphismes $\psi(x)$.

17) Construire à l'aide de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base qui diagonalise φ. On pourra utiliser la symétrie de φ.

FIN DU PROBLÈME

SUJET 5

Mines MP II 2012

Formule sommatoire de Poisson

L'objectif de ce problème est d'établir sous quelles conditions la formule sommatoire de Poisson est vraie et d'en étudier certaines applications.

Les fonctions considérées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{L}^*$ l'espace vectoriel des fonctions continues f telles qu'il existe $\alpha > 1$ pour lequel la fonction $x \mapsto |x|^\alpha f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

A. Préliminaires

La *transformée de Fourier* de $f \in \mathscr{L}$ est la fonction $\hat{f}$ définie par la formule :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}x.$$

montrer que c'est C infini

1) Justifier que pour tout $f \in \mathscr{L}$, $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathscr{W}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{L}$ telles que $\hat{f} \in \mathscr{L}$, et par $\mathscr{W}^*$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{L}^*$ telles que $\hat{f} \in \mathscr{L}^*$.

2) Établir que $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}^*$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, vérifiant l'inclusion $\mathscr{W}^* \subset \mathscr{W}$.

Étant donné $f \in \mathscr{L}$, $\alpha > 0$ et $y, \nu \in \mathbb{R}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ et $f_{y,\nu}(x) = f(x+y)e^{-2i\pi\nu x}$.

3) Déterminer les transformées de Fourier de f_α et $f_{y,\nu}$ en fonction de $\hat{f}$. Que peut-on en déduire sur les espaces $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}^*$?

4) Calculer les transformées de Fourier des fonctions s et t définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leqslant \frac{1}{2}\,; \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$t(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{pour } |x| < 1\,; \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5) Montrer que $\mathscr{W}^*$ et $\mathscr{W}$ sont distincts de $\mathscr{L}$. On pourra pour cela s'aider de la fonction s définie à la question précédente.

6) Si f_n est une suite de fonctions de $\mathscr{W}$ convergeant en moyenne vers une fonction $f \in \mathscr{W}$, montrer que la suite $\hat{f}_n$ converge vers $\hat{f}$, uniformément sur $\mathbb{R}$.

B. Formule sommatoire de Poisson

Soit $f \in \mathscr{L}^*$. Sa *périodisée* $\tilde{f}$ est définie par la formule $\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$.

7) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

8) Déterminer, en fonction de $\hat{f}$, les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par la formule

$$c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x)\, e^{-2i\pi nx}\, \mathrm{d}x.$$

On rappelle que si deux fonctions continues périodiques ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

9) Montrer que si $\hat{f} \in \mathscr{L}^*$, alors $\tilde{f}$ est égale à la somme de sa série de Fourier. En déduire, pour tout $f \in \mathscr{W}^*$, la *formule de Poisson* :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Les parties suivantes donnent diverses applications de la formule de Poisson.

C. Application à la formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathscr{W}^*$.

10) En appliquant la formule de Poisson à la fonction $f_{x,\xi}$ définie dans la partie A, établir la généralisation suivante, pour tous réels x et ξ :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\, e^{-2i\pi n\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+\xi)\, e^{2i\pi x(n+\xi)}.$$

Montrer que cette formule donne un développement en série de Fourier de la fonction périodisée $\widetilde{F_x}$, où F_x est la fonction définie par $F_x(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi}$.

11) En déduire la *formule d'inversion de Fourier* :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

On pourra pour cela interpréter le second membre comme un coefficient de Fourier particulier de $\widetilde{F_x}$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est *valeur propre* de la transformation de Fourier dans $\mathscr{W}^*$ s'il existe $f \in \mathscr{W}^*$ non nulle telle que $\hat{f} = \lambda f$.

12) Montrer qu'une telle valeur propre est une racine quatrième de l'unité, puis déterminer toutes les valeurs propres *réelles* de la transformation de Fourier dans $\mathscr{W}^*$. On pourra s'aider de combinaisons linéaires des fonctions t et $\hat{t}$ où t est définie à la question 4).

Les parties suivantes sont indépendantes les unes des autres.

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker

On considère, dans cette partie, une fonction $f \in \mathscr{W}^*$ telle que $\hat{f}$ s'annule en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

13) Montrer qu'alors f est déterminée de façon unique par la donnée de la suite des *échantillons* $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$. (On pourra s'aider de la formule généralisée de Poisson établie à la question 10).)

14) Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement que $\hat{f}$ s'annule en dehors d'un intervalle $[-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$? (On pourra considérer la fonction $\xi \mapsto t(\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon}) - t(\frac{\xi+\frac{1}{2}}{\varepsilon})$, où t est la fonction définie à la question 4).)

E. Contre-exemple de Katznelson

Dans cette partie, on considère la fonction t définie à la question 4) et l'on pose, pour tous $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et N entier > 0 :

$$u_k(x) = t(2^k x) - t(2^{k+1}x)$$
$$u_{k,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N}} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big)\, u_k(x-n).$$

On pose enfin, pour une suite donnée $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs :

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,N_k}.$$

On pourra utiliser, sans les re-démontrer, les égalités suivantes concernant le *noyau de Fejér* K_N :

$$K_N(x) = \sum_{|n|<N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big)\, e^{2i\pi nx} = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}\Big)^2$$

la deuxième égalité n'ayant lieu que si $x \notin \mathbb{Z}$.

15) Montrer que la fonction f est bien définie (on pourra distinguer les cas $x \in \mathbb{Z}$ et $x \notin \mathbb{Z}$). La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$?

Bien que ce ne soit pas nécessaire, pour la conformité au programme, on pourra admettre dorénavant que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

16) Montrer que f est intégrable et que la série de terme général u_{k,N_k} converge vers f en moyenne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$?

17) Etablir l'inégalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u_{k,N}}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\hat{u}_k| .$$

18) En déduire qu'il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\hat{f}$ soit intégrable et que la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$ converge vers $\hat{f}$ en moyenne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la nature de la convergence de la série de terme général u_{k,N_k} ?

19) Examiner la validité de la formule de Poisson pour cette fonction f. Que peut-on en conclure ?

F. Application à la resommation d'Ewald

On note g la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $g(x) = e^{-\pi x^2}$, et l'on admet que $\hat{g} = g$.

20) Donner une valeur approchée de la somme de la série :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{n}{100}\right)^2}$$

exacte à 10^{-10000} près.

FIN DU PROBLÈME

A 2002 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

(**Durée de l'épreuve** : **4 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il est conseillé aux Candidats de lire le problème en entier. Les deuxième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des parties précédentes.

Le crible d'Ératosthène donne un algorithme qui permet de savoir si un entier est premier ou non. Il est par suite possible d'indexer la suite des nombres premiers $p_i,\ i = 1, 2, \ldots$:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots$$

Dans tout le problème la lettre p est réservée aux nombres premiers. Étant donné un réel x, sa partie entière $[x]$ est l'entier n qui vérifie la double inégalité suivante :

$$[x] = n \leq x < n + 1.$$

Étant donné un réel x, supérieur ou égal à 2, $(x \geq 2)$, il existe un entier N égal au rang du plus grand nombre premier p_N inférieur ou égal à x

$$p_N = \sup\{p \mid p \leq x\}$$

Première partie

Le but de cette partie est de démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée et d'étudier la nature de la série de terme général $1/p_i,\ i = 1, 2, \ldots$.

I-1. **La suite des nombres premiers est illimitée** :

Démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée en considérant, par exemple, pour n nombres premiers $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ donnés, l'entier Q défini à partir de ces n nombres premiers par la relation suivante :

$$Q = p_1.p_2.\ldots.p_n + 1 = \prod_{i=1}^{n} p_i + 1.$$

Dans toute la suite n est un entier supérieur ou égal à 2 $(n \geq 2)$, s un réel donné strictement positif $(s > 0)$

I-2. **Ensemble** M_n :

a. Justifier la relation suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{k\,s}}.$$

b. Soient a et b deux entiers, différents l'un de l'autre, tous les deux supérieurs ou égaux à 2 $(a \neq b,\ a \geq 2,\ b \geq 2)$; démontrer que la série double de terme général $u_{i\,j},\ i = 0, 1, 2, \ldots,$ $j = 0, 1, 2, \ldots,$ défini par la relation suivante

$$u_{i\,j} = \frac{1}{a^{i\,s}.b^{j\,s}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

est sommable. Déterminer sa somme S.

Soient $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ les n premiers nombres premiers, M_n l'ensemble des réels obtenus en considérant tous les produits des réels $(p_1)^s,\ (p_2)^s, \ldots,\ (p_n)^s$ élevés à des exposants α_i, $1 \leq i \leq n,$ entiers positifs ou nuls.

$$M_n = \left\{ m \mid m = (p_1)^{s\,\alpha_1}.(p_2)^{s\,\alpha_2}.\ldots.(p_n)^{s\,\alpha_n}, \quad \alpha_i \in \mathbf{N} \right\}.$$

c. Démontrer que l'application $\left(\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \mapsto (p_1)^{s\,\alpha_1}.(p_2)^{s\,\alpha_2}.\ldots.(p_n)^{s\,\alpha_n}$, de $\mathbf{N}^n$ dans $M_n,$ est injective. En déduire qu'il est possible d'indexer les réels m dans l'ordre croissant : l'application $i \mapsto m_i$ est strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ sur M_n.

Exemples : écrire la suite des 12 premiers termes de la suite $(m_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ lorsque le réel s est égal à 1 et l'entier n égal à 2 puis à 3.

Il est admis que la série de terme général $v_i = 1/m_i,\ i \in \mathbf{N}^*,$ est convergente ; sa somme est désignée par le symbole : $\sum_{m \in M_n} m^{-1}$. Comme le laisse présager l'alinéa b, le résultat plus général ci-dessous est vrai et est admis :

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1} = \sum_{m \in M_n} \frac{1}{m} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i}.$$

Soit f_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$f_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1}.$$

Soit N le rang du plus grand nombre premier inférieur à n ($N = \sup\{i \mid p_i \leq n\}$).

d. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1}.$$

Retrouver, en donnant une valeur particulière au réel s, le résultat : la suite des entiers premiers est illimitée.

Déterminer, en supposant le réel s inférieur ou égal à 1 ($0 < s \leq 1$), la limite, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de l'expression $f_n(s)$ introduite ci-dessus.

Il est admis, puisque la suite des nombres premiers est illimitée, qu'à tout réel x supérieur ou égal à 2 ($x \geq 2$), peut être associé un entier N tel que le réel x soit encadré par les nombres premiers p_N et p_{N+1} :

$$p_N \leq x < p_{N+1}.$$

e. Établir, lorsque le réel s est strictement supérieur à 1 ($s > 1$), l'encadrement ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

En déduire, pour $s > 1$, la limite de l'expression $f_n(s)$ introduite ci-dessus lorsque l'entier n tend vers l'infini.

I-3. **Série de terme général** $1/p_i,\ i = 1, 2, \ldots$:

Déduire des résultats ci-dessus la nature de la série de terme général $v_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ défini par la relation suivante.

$$v_i = \ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

En déduire la nature de la série de terme général :

$$w_i = \frac{1}{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Quelle conclusion qualitative est-il possible d'en tirer sur la répartition des nombres premiers ?

I-4. **Fonction** ζ :

Soit ζ la fonction limite de la suite f_n. Démontrer que cette fonction, définie d'après la question I-2.e sur la demi-droite ouverte $]1, \infty[$ par la relation ci-dessous, est continûment dérivable.

$$\zeta(s) = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'établir une majoration du produit des nombres entiers premiers inférieurs ou égaux à un entier donné n et d'encadrer le plus petit commun multiple de tous les entiers inférieurs ou égaux à cet entier n.

Soit toujours n un entier supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), N le rang du plus grand nombre premier inférieur ou égal à n ; soit P_n le produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n :

$$p_N \leq n < p_{N+1}, \quad P_n = \prod_{i=1}^{N} p_i.$$

II-1. Majoration du produit P_n des nombres premiers majorés par un entier n :

a. Construire un tableau donnant pour les valeurs 2, 3, 4 et 5 de l'entier n les valeurs de N, p_N, P_n, 4^n.

b. Vérifier que, si l'entier $n+1$ n'est pas premier, l'inégalité $P_n \leq 4^n$ implique l'inégalité $P_{n+1} \leq 4^{n+1}$.

c. L'entier $n+1$ est premier dans cet alinéa ; justifier l'existence d'un entier m tel que :

$$2\,m + 1 = n + 1.$$

Démontrer que tout nombre premier p compris entre $m+2$ et $n+1$ ($m+2 \leq p \leq n+1$) divise le coefficient du binôme $C_{2\,m+1}^{m}$. Établir la majoration suivante :

$$C_{2\,m+1}^{m} \leq 4^m.$$

En déduire que l'inégalité $P_{m+1} \leq 4^{m+1}$ implique l'inégalité $P_{n+1} \leq 4^{n+1}$.

d. En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, la majoration :

$$P_n = \prod_{i=1}^{N} p_i \leq 4^n.$$

Soit d_n le plus petit commun multiple de tous les entiers $1, 2, 3, \ldots, n$.

II-2. Une expression du p. p. c. m. d_n :

Démontrer que le p. p. c. m. d_n est égal au produit des nombres premiers p_i, inférieurs ou égaux à l'entier n, élevés à des puissances α_i égales aux parties entières du rapport $\ln n$ sur $\ln p_i$; c'est-à-dire :

$$p_N \leq n < p_{N+1}, \quad d_n = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}, \quad \text{avec : } \alpha_i = \left[\frac{\ln n}{\ln p_i} \right].$$

II-3. Une minoration du p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$:

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), soit I_n l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_n = \int_0^1 x^n\,(1-x)^n\,dx.$$

a. Démontrer la majoration :

$$I_n \leq \frac{1}{4^n}.$$

b. Démontrer que le p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$ est divisible par tout entier $n+k+1$, lorsque l'entier k varie de 0 à n ($0 \leq k \leq n$). En déduire que le produit $d_{2\,n+1}.I_n$ est un entier en considérant, par exemple, une expression de I_n obtenue par développement de $(1-x)^n$.

Démontrer, à l'aide de la majoration de l'intégrale I_n, une minoration du p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$.

Troisième partie

Le but de cette partie est d'étudier les deux fonctions π et θ définies ci-dessous pour en déduire un encadrement à l'infini du réel $\pi(x)$.

Pour tout réel x supérieur ou égal à 2 ($x \geq 2$), $\pi(x)$ est égal au nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux au réel x.

$$p_N \leq x < p_{N+1}, \quad \pi(x) = N = \sum_{i=1}^{N} 1.$$

Pour tout réel x supérieur ou égal à 2 ($x \geq 2$), $\theta(x)$ est égal à la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs ou égaux au réel x.

$$p_N \leq x < p_{N+1}, \quad \theta(x) = \sum_{i=1}^{N} \ln p_i.$$

Plus généralement : étant donnée une suite réelle $A = (a_k)_{k\geq 1}$, soit H_A la fonction définie sur la demi-droite fermée $\left[1, \infty\right[$, par la relation suivante :

$H_A(x)$ est nul sur l'intervalle $\left[1, 2\right[$, égal, pour $x \geq 2$, à la somme des termes de la suite A dont les rangs sont inférieurs ou égaux au rang N du plus grand nombre entier premier inférieur ou égal à x :

$$H_A(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 1 \leq x < 2, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k, \text{ si } 2 \leq x \text{ et } p_N \leq x < p_{N+1}. \end{cases}$$

III-1. Un résultat auxiliaire :

Préciser, pour une suite $A = (a_i)_{i\geq 1}$ donnée, sur quels intervalles la fonction H_A est continue. Quels sont ses points de discontinuité ? Préciser en ces points x la valeur de $H_A(x) - H_A(x-0)$.

Soit f une fonction réelle, définie et continûment dérivable sur la demi-droite fermée $\left[2, \infty\right[$, et une suite réelle $A = (a_i)_{i\geq 1}$; démontrer la relation suivante : pour tout réel x compris entre p_N et p_{N+1}, $(p_N \leq x < p_{N+1})$ il vient :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i\, f(p_i) = H_A(x)\, f(x) - \int_2^x H_A(t)\, f'(t)\, dt.$$

III-2. **Une majoration de la fonction** π :

a. Démontrer la majoration suivante de la fonction θ :

$$\theta(x) \leq x\, \ln 4.$$

b. Établir en choisissant, dans la relation établie à la question précédente, comme suite A, la suite $\ln p_k$, $k = 1, 2, ...,$ et comme fonction f, la fonction $x \mapsto 1/\ln x$, l'inégalité suivante :

$$\pi(x) \leq \ln 4\left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}\right).$$

c. Démontrer la convergence vers 0, lorsque le réel x croît vers l'infini, de la fonction $R(x)$ suivante :

$$R(x) = \frac{\ln x}{x} . \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}.$$

Indication : introduire, pour $x \geq 4$, les intégrales de 2 à $\sqrt{x}$ et de $\sqrt{x}$ à x.

d. En déduire l'existence d'un réel x_0 tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à x_0, la fonction π vérifie la majoration suivante :

$$\pi(x) \leq 4\, \ln 2\, \frac{x}{\ln x}.$$

III-3. **Une minoration de la fonction** π :

En utilisant par exemple la minoration du p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$ obtenue à la question II-3, démontrer qu'il existe un réel x_1 tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à x_1, la fonction π vérifie la minoration suivante :

$$\pi(x) \geq \frac{\ln 2}{2}\, \frac{x}{\ln x}.$$

Ces deux résultats sont cohérents avec le "théorème des nombres premiers" établi par Hadamard et de La Vallée Poussin en 1896, qui affirme que la fonction π est équivalente à l'infini à la fonction $x \mapsto x/\ln x$.

Quatrième partie

Soit, dans toute cette partie, un entier n donné $(n \geq 2)$. L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est l'ensemble quotient de l'anneau $\mathbf{Z}$ par la relation d'équivalence : ”deux entiers relatifs sont équivalents si leur différence est divisible par l'entier n”. Classiquement un élément de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, une classe d'équivalence, est notée $\bar{a}$, a étant un représentant de cette classe.

Soit φ la fonction qui, à l'entier n, associe le nombre d'éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

IV-1. **Théorème d'Euler** :

a. Démontrer que, pour que l'élément $\bar{a}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit inversible, il faut et il suffit que l'entier a soit premier avec n. Donner les valeurs de $\varphi(n)$ lorsque l'entier n prend toute valeur de 2 à 7.

b. Démontrer que l'ensemble $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles est un groupe multiplicatif. Quel est son cardinal ?

Soit a un entier compris entre 0 et $n-1$ $(0 \leq a \leq n-1)$, premier avec n. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles. Démontrer la relation :

$$\bar{a}^{\varphi(n)} \equiv \bar{1}, \qquad (n).$$

Indication : considérer l'application $\gamma : \bar{b} \mapsto \bar{b}.\bar{a}$ de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ dans lui-même puis l'expression c définie par la relation suivante :

$$c = \prod_{b \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*} \bar{b}.\bar{a}.$$

c. Application : déterminer le reste de la division de 251^{311} par 6.

IV-2. **Principe de cryptographie** :

Soit n un entier $(n \geq 2)$ égal au produit de deux nombres premiers p et q ; $n = p.q$.

a. Démontrer la relation :

$$\varphi(n) = (p-1)\,(q-1).$$

Soit e un nombre entier premier avec $(p-1)\,(q-1)$.

b. Établir l'existence d'un entier d tel que :

$$\bar{e}.\bar{d} \equiv 1, \qquad \big((p-1)\,(q-1)\big).$$

Exemple simple : $n = 6$, $e = 5$; calculer, pour tout élément $\bar{a}$ de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\bar{a}^{e.d}$.

c. Démontrer pour tout élément $\bar{a}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, la relation :

$$\bar{a}^{\,e.d} \equiv \bar{a}, \qquad (n).$$

En fait l'entier e est connu de l'expéditeur, l'entier d du destinataire. L'entier d est très difficile à calculer si la factorisation de l'entier n n'est pas connue (les entiers p et q sont grands).

Chiffrement du message a par l'expéditeur : $a \to a^e$; déchiffrement par le destinataire : $a^e \to (a^e)^d$. Le message est retrouvé.

FIN DU PROBLÈME

99 MATH. I - MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. .
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit I le segment $[0, 1]$; une fonction réelle f, définie sur l'intervalle I, est continue par morceaux s'il existe une subdivision finie de I : $0 = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n = 1$, telle que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est continue et se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$. Il est admis qu'une fonction f continue par morceaux sur I est bornée. La borne supérieure des valeurs prises par la fonction $|f|$ est désignée par $\|f\|$, $\left(\|f\| = \sup_{0\le x\le 1} |f(x)|\right)$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues par morceaux sur I. Il est admis que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Les suites considérées dans ce problème sont des suites de nombres réels indexés par des entiers strictement positifs : $A = (a_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$.

Suite équi-répartie dans I : une suite $A = (a_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ de réels a_n, $n\in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I, ($0 \leqslant a_n \leqslant 1$) est équi-répartie dans I, si et seulement si, pour toute fonction f de E, la suite des moyennes arithmétiques des valeurs prises par la fonction f aux N points a_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, est convergente et de limite l'intégrale de la fonction f étendue à l'intervalle I :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\, dx .$$

Suite équi-répartie modulo I : étant donnée une suite de réels $(r_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$; soit $(a_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$, la suite des réels définis par la relation : pour tout entier n strictement positif $a_n = r_n - [r_n]$, où

$[r_n]$ est la partie entière du réel r_n ($[r_n]$ est un entier tel que $[r_n] \leqslant r_n < [r_n]+1$). La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, si et seulement si la suite des réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est équi-répartie dans I.

1°) Un critère d'équi-répartition :

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels a_n, $n\in\mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I. Soit F_A le sous-ensemble des fonctions de l'espace E pour lesquelles la relation ci-dessous a lieu :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

a. Démontrer que le sous-ensemble F_A de E est un sous-espace vectoriel de E et que toutes les fonctions constantes de E appartiennent au sous-espace vectoriel F_A.

b. Soit g une fonction de l'espace E telle que, pour tout ε positif donné, il existe deux fonctions f_1 et f_2 appartenant au sous-espace vectoriel F_A telles que la fonction g soit comprise entre f_1 et f_2 et l'intégrale de la fonction g étendue à I soit comprise à ε près entre les intégrales des fonctions f_2 et f_1 :

• pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$,

• $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,dx + \varepsilon$.

Démontrer que la fonction g appartient au sous-espace vectoriel F_A.

c. Démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que le sous-espace vectoriel F_A contienne une partie P de E dense dans E.

2°) Une condition nécessaire et suffisante d'équi-répartition :

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels a_n, $n\in\mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I = [0, 1]. Soit J un intervalle, contenu dans l'intervalle I, d'extrémités c et d ; soit h_J la fonction égale à 1 sur l'intervalle J et à 0 sur le complémentaire de J dans I :

$$h_J(x) = \begin{cases} 1, \text{ si x appartient à J contenu dans I,} \\ 0, \text{ si x appartient à I sans appartenir à J.} \end{cases}$$

a. Démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que, pour tout intervalle J de I, la fonction h_J appartienne au sous-espace F_A de E.

b. Soit J un intervalle dont les extrémités c et d vérifient les inégalités : $0 < c < d < 1$. Étant donné un réel positif ε donné, (ε > 0), déterminer, deux fonctions continues f_1 et f_2 vérifiant les relations :

• $f_1(0) = f_1(1)$, $f_2(0) = f_2(1)$, pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant h_J(x) \leqslant f_2(x)$,

• $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \int_0^1 h_J(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,dx + \varepsilon$.

La construction claire des graphes des deux fonctions f_1 et f_2 tient lieu de réponse.

Il est admis que la conclusion précédente est valable pour tout intervalle J, contenu dans l'intervalle I, sans que la condition $0 < c < d < 1$ sur ses extrémités soit réalisée. En déduire : pour que la suite $A = (a_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ soit équi-répartie dans I, il suffit que toutes les fonctions continues prenant mêmes valeurs aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle I appartiennent au sous-espace vectoriel F_A de E.

c. Étant donné un entier N (N > 0), soit N(J) le nombre de termes a_n de la suite A qui appartiennent à l'intervalle J et dont les indices n sont inférieurs ou égaux à N ; démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il faut et il suffit que, pour tout intervalle J, la suite des réels $\frac{N(J)}{N}$, $N\in \mathbb{N}^*$, soit convergente et de limite d–c, lorsque l'entier N croît vers l'infini : $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{N(J)}{N} = d - c$.

3°) <u>Un critère d'équi-répartition modulo I ; théorème de Bohl</u> :

Étant donnés une suite de réels $R = (r_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ et deux entier naturels k et N strictement positifs, soit C(R, k, N) le nombre complexe défini par la relation suivante :

$$C(R, k, N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2\, i\, \pi\, k\, r_n)\,.$$

a. Démontrer que, si la suite $R = (r_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, pour tout entier k strictement positif, la limite de l'expression C(R, k, N), lorsque l'entier N croît indéfiniment, est nulle : $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2\, i\, \pi\, k\, r_n) = 0$.

b. Démontrer réciproquement, qu'une suite de réels $(r_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, si, pour tout entier k strictement positif, la limite, lorsque l'entier N croît vers l'infini, de l'expression C(R, k, N) est nulle.

c. Exemple : soit θ un réel donné. Démontrer que la suite des réels nθ, $n\in \mathbb{N}^*$, est équi-répartie mudulo I si et seulement si le réel θ est irrationnel.

Dans les questions suivantes le résultat classique de Cesaro est admis et peut être utilisé : si une suite réelle $(x_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite ℓ, la suite de terme général $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$, $N\in \mathbb{N}^*$, est convergente et de limite ℓ.

4°) Exemples de suites équi-réparties modulo I :

Dans cette question la suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ considérée est définie à partir d'une fonction φ réelle définie sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$: pour tout entier n ($n \geqslant 1$) $r_n=\varphi(n)$. Soient r_n, A_n les nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$d_n = r_{n+1} - r_n \ , \ A_n = \exp(2i\pi r_n) \ ,$$

La fonction φ, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$, est supposée à valeurs positives, de classe C^2, concave ($\varphi'' \leqslant 0$). En outre, dans un voisinage de l'infini, sa dérivée φ' est négligeable devant 1 et la fonction 1/t devant $\varphi'(t)$ $\big(\varphi'(t) = o(1),\ 1/t = o(\varphi'(t))\big)$.

a. Établir que les réels d_n, $n\in\mathbb{N}^*$, sont strictement positifs et que les deux suites de réels d_n et $\dfrac{1}{n\,d_n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, tendent vers 0 lorsque l'entier n croît vers l'infini.

Soient B_n les nombres complexes définis par la relation : $B_n = \dfrac{1}{2i\pi}\Big(\dfrac{A_{n+1}}{d_{n+1}} - \dfrac{A_n}{d_n}\Big)$. Il est admis que, pour tout entier n strictement positif, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$|A_n - B_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n}\right| + \pi\,|d_n| \ .$$

b. Démontrer, lorsque l'entier N croît vers l'infini, la convergence vers 0 de la suite des réels $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} A_n$, $N\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n = 0.$

c. Est-ce que la suite des réels $r_n = \varphi(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, est équi-répartie modulo I ?

5°) Suites $(\ln^{\alpha}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$:

Étant donné un réel α supérieur ou égal à 1 ($\alpha \geqslant 1$), soient A_α la suite des réels $(\ln^{\alpha}(n))$, $n\in\mathbb{N}^*$ et ψ_α la fonction, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$: $x \mapsto \ln^{\alpha}(x)$.

a. Pour quelles valeurs du réel α, les résultats de la question 4 permettent d'affirmer que la suite A_α est équi-répartie ?

b. Soit f la fonction définie sur la demi-droite $]0, \infty[$: $x \mapsto \exp\big(2i\pi \ln(x)\big)$. Déterminer une primitive de cette fonction.

c. Étant donné un entier N, strictement positif, soient L_N et I_N les deux nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp\big(2i\pi \ln(n)\big) \ ; \ I_N = \frac{1}{N}\int_1^N \exp\big(2i\pi \ln(x)\big)\,dx.$$

Déterminer les limites, lorsque l'entier N croît vers l'infini, du module $|I_N|$ de I_N et de la différence $L_N - I_N$. Est-ce que la suite A_1, définie ci-dessus, est équi-répartie modulo I ?

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE

3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base.
4. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ puis calculer P^{-1}.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $B^2 + 3B = A$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.
   (a) Justifier que $v^2 + 3v = u$.
   (b) Vérifier que $uv = vu$ et en déduire que, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$,le vecteur $v(e_k)$ est colinéaire à e_k,conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale.
   (c) On pose $V = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Expliciter Δ en fonction de V puis déterminer les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ainsi que celle de la matrice B. La relation $B^2+3B = A$ est équivalente à $V^2 + 3V = \Delta$.
   Et cette dernière relation est équivalente à $\alpha_1^2+3\alpha_1 = 10$, $\alpha_2^2+3\alpha_2 = 4$ et $\alpha_3^2+3\alpha_3 = 0$, après la résolution de ces équations, on obtient $\alpha_1 = -5$ ou 2, $\alpha_2 = -4$ ou 1, et $\alpha_3 = 0$ ou -3.
   (d) Combien de solutions l'équation $X^2 + 3X = A$ admet-t-elle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Problème

Dans ce problème, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{D}$ l'opérateur de dérivation défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par : $\mathscr{D}(f) = f'$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; de même, $\mathbb{C}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes à une indéterminée et D l'opérateur de dérivation défini sur cet espace vectoriel par : $D(P) = P'$, $P \in \mathbb{C}[X]$.
On rappelle que $\mathscr{D}$ et D sont des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement.
Si $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ est un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$, on lui associé l'équation différentielle homogène noté $\mathscr{E}_P$ suivante :

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (\mathscr{E}_P)$$

Par "solution la solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_P)$ " on fait référence à toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ n-fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; a_n f^{(n)(x)} + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Comme $a_n \neq 0$, il est évident que toute solution de $\mathscr{E}_P$ est un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. L'ensemble des solutions est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

La troisième partie du problème utilise les résultats de l'avant dernière question de la seconde partie ; la deuxième partie utilise les résultats de la première.

Première partie
Résultats préliminaires

1.1. Soit n un entier naturel quelconque ; on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$.

1.1.1. Montrer que $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme D.
Dans la suite on note D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{C}_n[X]$ et I_n l'application identité de $\mathbb{C}_n[X]$ définie par : $I_n(P) = P$, $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

1.1.2. Montrer que l'endomorphisme D_n est nilpotent.

1.1.3. Montrer que, pour tout complexe non nul α, l'edomorphisme $D_n+\alpha I_n$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide des puissances de α et D_n.

1.2. Déduire de ce qui précède que si α est un complexe non nul et $R \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique polynôme $R_1 \in \mathbb{C}_[X]$ tel que $R_1' + \alpha R_1 = R$; vérifier que R_1 et de degré n et l'exprimer en fonction de R.

1.3. Soit λ un nombre complexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

1.3.1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \mapsto G(x)e^{-\lambda x}$ où G est une primitive de la fonction $s \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$.

1.3.2. Dans cette question, on pose $g(x) = R(x)e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, où R est un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$, où S est un polynôme à coefficients complexes dont le polynôme dérivé est égal à R.

1.3.3. Dans cette question, on pose $g(x) = R(x)e^{\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$, où μ désigne un complexe distinct de λ et R est un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les solution de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + ce^{\lambda x}$ où R_1 est l'unique polynôme à coefficients complexes vérifiant $R_1' = (\mu - \lambda)R_1 = R$ et c est un paramètre complexe.

Deuxième partie
Expression des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_P)$

2.1. **Cas où $P = (X - \lambda)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$**
Montrer que dans ce cas, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$ si, et seulement si, il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$. On pourra calculer la dérivée n-ième de la de la fonction $h : x \mapsto e^{-\lambda x}f(x)$.

2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul ; on pose $P = (X - \lambda)Q$.

2.2.1. Montrer que les deux endomorphismes $Q(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D} - \lambda I)$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, commutent ; I désigne l'application identité du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.2.2. En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$ si, et seulement si, $P(\mathscr{D})(f) = 0$ si, et seulement si, $f' - \lambda f$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_Q$.

2.3. En faisant un raisonnement par récurrence, retrouver le résultat de la question 2.1. ci-dessus sans savoir recours à un calcul de la dérivéé n-ième.

2.4 **Un exemple :** Déterminer les entiers qui sont racines du polynôme $P_1 = (X-1)(X+1)^3$ puis le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$; donner l'expression des solutions de l'équarion différentielle $\mathscr{E}_{P_1}$.

2.5. **Cas général** :On suppose ici que le polynôme s'écrit $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m_k}$, où r est un entier ≥ 2, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts, et $m_1, \dots, m_r$ des entiers naturels non nuls
En faisant un raisonnement par récurrence sur le degré de P, montrer que les solutions de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}$, où $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$. On pourra exploiter le résultat de la question 2.2.2.. Pour $n = 2$.

2.6. Montrer en précisant l'énoncé du théorème utilisé, que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, les solutions de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$ ont toujours la forme des solutions trouvées dans la question 2.5. précédente. Quelle est alors la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions de $\mathscr{E}_P$?

2.7. **Un autre exemple :** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $\mathscr{E}_{P_2}$ où $P_2 = X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1$, sachant que 1 est racine triple de P_2.

Troisième partie
Un résultat de finitude

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable ; pour tout réel τ, on désigne par f_τ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_\tau(x) = f(x+\tau)$, $x \in \mathbb{R}$; on note $E_f = \mathrm{Vect}(\{f_\tau \,;\, \tau \in \mathbb{R}\})$ le sous espace vectoriel complexe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les fonctions f_τ lorsque τ décrit $\mathbb{R}$.
On se propose dans cette partie de caractériser f pour que E_f soit de dimension finie. On suppose donc que E_f est de dimension finie $p \geq 1$ et on note $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une base de E_f.

3.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on défini la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n} + x) - f(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

3.1.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n \in E_f$ et justifier qu'il existe des complexes $\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{p,n}$ tels que $g_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,n}\varphi_k \quad (1)$

3.1.2. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'.

3.2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ et tout k-uplet $(x_1, \ldots, x_k)$ de réels, on note $\Delta_k(x_1, \ldots, x_k)$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ **"doit être dans** $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ **?"** de terme général $\varphi_j(x_i)$, $(i,j) \in \{1, \ldots, k\}^2$ (coefficient de la i-ième ligne et la j-ième colonne), et désigne par $\delta_k(x_1, \ldots, x_k)$ le déterminant de la matrice $\Delta_k(x_1, \ldots, x_k)$.
On cherche ici qu'il existe $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $\delta_k(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$. On va établir l'existence des a_k, $1 \leq k \leq p$, par récurrence.
On choisit donc $a_1 \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi(a_1) \neq 0$, ce qui est possible puisque la fonction φ_1 n'est pas identiquement nulle.

3.2.1. Montrer que fonction $x \mapsto \delta_2(a_1, x)$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas identiquement nulle, puis en déduire l'existence de $a_2 \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $\Delta_2(a_1, a_2)$ soit inversible.

3.2.2. Soit $1 \leq k < p$; on suppose qu'on ait construit les a_i pour $1 \leq i \leq k$ et on cherche à construire a_{k+1}. Montrer que la fonction $x \mapsto \delta_{k+1}(a_1, \ldots, a_k, x)$, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas identiquement nulle puis conclure. on pourra raisonner par l'absurde et développer le déterminant par rapport à sa dernière ligne.

3.3. Dans la suite, on désigne par $(a_1, \ldots, a_p)$ un $p-$uplet de nombres réels pour lequel la matrice $M = \Delta_p(a_1, \ldots, a_p)$ est inversible. On conserve les notations de la question 3.1.

3.3.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Z_n le vecteur de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ de composantes $g_n(a_1), \ldots, g_n(a_p)$ et Y_n le vecteur de composantes $\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{p,n}$. Vérifier que $Z_n = MY_n$.

3.3.2. Montrer alors que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la matrice m^{-1} et les complexes $f'(a_1), \ldots, f'(a_p)$, On notera Y cette limite et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les composantes de Y.

3.3.4. Déduire de ce qui précède que $f' \in E_f$. On pourra exploiter la relation (1) vu en 3.1.1.

3.4. Montrer plus généralement que si $h \in E_f$ alors h est dérivable et $h' \in E_f$, puis que déduire que E_f est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stable par $\mathscr{D}$, l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3.5. On note $\mathcal{D}$ l'endomorphisme de E_f induit par l'opérateur $\mathscr{D}$ et on désigne par P le polynôme caractéristique de $\mathcal{D}$. Montrer, en précisant le résultat utilisé, que la fonction f est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$. En déduire une expression de f puis vérifier que ce type de fonction répond bien à la question.

2.2.1. Montrer que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $f(t) = 0$.

2.2.2. Montrer que la fonction F est nulle.

2.3. **Une famille de solutions non bornées de (1)**
Soit $v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note F_v l'élément de Σ_A tel que $F_v(0) = F_v'(0) = v$. Montrer que si $v \neq 0$ alors la fonction $t \mapsto \|F_v(t)\|$ admet une limite infinie en $+\infty$.

2.4. **Des normes sur** Σ_A
Soit b un réel strictement positif.

2.4.1. Montrer que l'application $\Psi : \Sigma_A \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ F \mapsto (F(0), F(b))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

2.4.2. Montrer que l'application $\|.\|_b : F \mapsto \|f(0)\| + \|F(b)\|$ est une norme sur Σ_A.

2.4.3. Montrer également que l'application $\|.\|_{\infty,b} : F \mapsto \sup\limits_{0 \leq t \leq b} \|F(t)\|$ est une norme sur Σ_A.

2.4.4. Justifier que les normes $\|.\|_{\infty,b}$ et $\|.\|_b$, sur Σ_A, sont équivalentes.

3ème Partie
Comportement de solutions de l'équation différentielle (1)

3.1. **Une famille de suites d'éléments de** Σ_A
Soit $a \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul. Pour tout entier $m \geq 1$, on note $g_{m,a}$ l'unique élément de Σ_A vérifiant $g_{m,a}(0) = a$ et $g_{m,a}(m) = 0$.

3.1.1. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, l'application $t \mapsto \|g_{m,a}(t)\|$ est décroissante sur le segment $[0, m]$.

3.1.2. Montrer alors que $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\Sigma_A, \|.\|_1)$.

3.1.3. Justifier que la suite $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ qui converge dans $(\Sigma_A, \|.\|_1)$ vers un élément noté g_a.

3.2. **Une famille de solutions bornées de (1)**
On conserve ici les notations de la question 3.1. précédente.

3.2.1. Montrer que la suite de fonctions $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$ vers l'application g_a.

3.2.2. Montrer que $g_a(0) = a$ et que l'application $t \mapsto \|g_a(t)\|$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3.2.3. Montrer que g_a est une solution bornée de l'équation différentielle (1).

3.3. **Comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (1)**
On conserve ici les notations des questions et des parties précédentes. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on lui associe une famille $(g_{e_1}, ..., g_{e_n})$ d'applications construites comme à la question 3.1. précédente et on note Σ_1 le sous-espace vectoriel de Σ_A engendré par cette famille d'applications.

3.3.1. Montrer que les éléments de Σ_1 sont des solutions bornées de l'équation différentielle (1).

3.3.2. Montrer que la famille $(g_{e_1}, ..., g_{e_n})$ est une base de Σ_1.

3.3.3. Pour tout $v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, F_v désigne l'éléments de Σ_A vérifiant $F_v(0) = F_v'(0) = v$. Montrer que l'ensemble $\Sigma_2 := \{F_v \ ;\ v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ est un sous-espace vectoriel de Σ_A, de dimension n.

3.3.4. Montrer que les sous-espaces vectoriels Σ_1 et Σ_2 sont supplémentaires dans Σ_A.

3.3.5. Montrer que $\Sigma_A \backslash \Sigma_1$ est un ouvert dense de Σ_A et que toute solution F de l'équation différentielle (1) vérifie : $\begin{cases} \text{si } F \in \Sigma_A \backslash \Sigma_1, & \text{alors } \lim\limits_{t \to +\infty} \|F(t)\| = +\infty ; \\ \text{si } F \in \Sigma_1, \text{alors} & F \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+. \end{cases}$

Problème 2

Un résultat de LIOUVILLE relatif aux fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$

Dans ce problème le nombre d est un entier naturel strictement positif. On note $\|.\|_1$ la norme définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{d} |x_i|$, pour tout $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit $V(x)$ le voisinage discret (sous entendu dans $\mathbb{Z}^d$) de x par : $V(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d \ ;\ \|y - x\|_1 = 1\}$.

Ce voisinage est l'ensemble des plus proches voisins de x, il est fini de cardinal $2d$.

Si A est une partie non vide de $\mathbb{Z}^d$, on note $I(A)$l l'ensemble des $x \in A$ tels que $V(x) \subset A$ et ∂A le complémentaire dans A de $I(A)$. On remarquera que pour $A = \mathbb{Z}^d$ on a $I(A) = A$ et $\partial A = \emptyset$, et pour A fini de cardinal $< 2d$, on a $I(A) = \emptyset$ et $\partial A = A$.

On dit qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est harmonique sur $I(A)$ si, pour tout $x \in I(A)$,

$$f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in V(x)} f(y).$$

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

$1^{\text{ère}}$ Partie
Fonctions harmoniques sur le graphe $\mathbb{Z}^d$

Dans les trois premières questions de cette partie on prend $d = 1$.

4.1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est harmonique sur $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, quel que soit l'entier relatif k, on a $f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0$.

4.2. Montrer que l'ensemble des fonctions harmoniques sut $\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel de dimension 2, préciser une base de cet espace.

4.3. Montrer que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$, harmoniques sur $I(\mathbb{Z}^*)$, est un espace vectoriel de dimension 4, préciser une base de cet espace. On commencera par déterminer $I(\mathbb{Z}^*)$.

Dans la suite de cette partie, d est un entier strictement positif quelconque.

4.4. On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, positive et harmonique sur $\mathbb{Z}^d$.

4.4.1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $l \in V(k)$, $f(l) \leq 2df(k)$.

4.4.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $l \in \mathbb{Z}^d$, $f(l) \leq (2d)^{\|l-k\|_1} f(k)$.

4.4.3. Montrer que si $k \in \mathbb{Z}^d$ et $f(k) = 0$, alors f est la fonction nulle.

4.4.4. Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, alors, pour tout $l \in \mathbb{Z}^d$, $|\ln f(l) - \ln f(k)| \leq \|l-k\|_1 \ln(2d)$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Un résultat de LTOUVILLE dans un cadre discret

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant dû à LIOUVILLE.

Si $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ est harmonique et minorée (resp. majorée) sur $\mathbb{Z}^d$, alors f est constante.

L'entier d est quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et la base canonique de $\mathbb{R}^d$ est notée $(e[1], ..., e[d])$. On a donc

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., d\}^2, \;\; e[i]_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \; i = j; \\ 0 & \text{si } \; i \neq j. \end{cases}$$

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont mutuellement indépendantes et de même loi, la loi uniforme sur l'ensemble $D_d = \{-d, -d+1, ..., -1, 1, ..., d-l, d\}$.

On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$Y_o = 0, \;\; \text{et} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; Y_{n+1} = Y_n + \text{sign}(X_n) e[|X_n|]),$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{sign}(k) = \frac{k}{|k|}$.

Noter que chaque Y_n est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ qu'on écrit $Y_n = \sum\limits_{j=1}^{d} Y_{n,j} e[j]$; les composantes $Y_{n,j}$ de Y_n, sont des variables aléatoires à valeurs entières.

La suite Y_n est appelée *une marche aléatoire symétrique* sur $\mathbb{Z}^d$, issue de 0. On modélise ainsi l'évolution d'un point mobile sur $\mathbb{Z}^d$, qui à tout instant n choisit au hasard uniforme un des $2d$ plus proches voisins de sa position précédente Y_{n-1}.

On considère aussi une variable aléatoire U, indépendante des X_n (et donc des Y_n) qui suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ fixé.

5.1. Soit g une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant

$$\exists (a,b) \in [0, +\infty[^2, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}^d, \;\; |g(k)| < \exp(a\|k\|_1 + b).$$

5.1.1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|g(Y_n)| \leq \exp(an + b)$.

5.1.2. En utilisant le théorème de transfert, montrer que l'espérance de la variable aléatoire $g(Y_U)$ existe et établir I'inégalité

$$E(|g(Y_U)|) \leq \exp(b + \lambda(e^a - 1)).$$

5.1.3. Montrer aussi la relation $E(g(Y_U)^2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g(k)^2 P\{Y_U = k\}$, en justifiant l'existence de l'espérance et la sommabilité de la famille, mises en jeux dans les deux membres de cette égalité.

5.2. On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$, harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. On rappelle un résultat vu dans la première partie : $f(k) \leq (2d)^{\|k\|_1}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$.

5.2.1. Montrer que les variables aléatoires $f(Y_j)$, pour $j \in \mathbb{N}$, et $f(Y_U)$ admettent toutes un moment d'ordre 2 et prouver les relations

$$E(f(Y_U)^2) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}E(f(Y_n)^2) \ \ et \ \ E(f(Y_U)) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}E(f(Y_n)).$$

5.2.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(f(Y_n)) = f(0) = 1$ et en déduire que $E(f(Y_U)) = 1$.

5.3. On note H l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ telles que $E(f(Y_U)^2)$ existe. Montrer que H est un espace vectoriel réel et que l'application $S : (f_1, f_2) \mapsto S(f_1, f_2) = E(f_1(Y_U)f_2(Y_U))$ est un produit scalaire sur H. La norme associée est notée $\|.\|_2$.

5.4. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$ qui sont harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. Cet ensemble E est non vide (il contient la fonction constante 1) et il est inclus dans l'espace H, d'après la question 5.2. précédente.

On choisit une fonction $m \in E$ de norme $\|.\|_2$ maximale, c'est à dire $E(f(Y_U)^2) \leq E(m(Y_U)^2)$ pour tout $f \in E$. La possibilité d'un tel choix est admise et on sait, d'après la première partie, que m ne s'annule pas sur $\mathbb{Z}^d$. Pour tout $i \in D_d = \{-d, -d+1, ..., -1, 1, ..., d-1, d\}$ on définit une fonction $f_i : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$ en posant

$$f_i(x) = \frac{m(x + \text{sign}(i)e[|i|])}{m(\text{sign}(i)e[|i|])}.$$

5.4.1. Montrer que, pour tout $i \in D_d$, la fonction f_i est harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifier qu'elle est positive et satisfait $f_i(0) = 1$.

5.4.2. Montrer que la fonction m est une combinaison convexe des fonctions f_i, $i \in D_d$.

5.4.3. En déduire que, pour tout $i \in D_d$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $m(x) = f_i(x)$, puis montrer que m est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{Z}^d$.

5.5. On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$, harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. Montrer l'inégalité $V(f(Y_U)) \leq E(m(Y_U)^2) - 1$, puis en déduire que f est constante sur $\mathbb{Z}^d$.

5.6. Comment prouver le résultat général de LIOUVILLE ?

FIN DE L'ÉPREUVE

X-ENS PC 2019

Théorème 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $A(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ un polynôme non nul tel que $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors pour tout entier $L \geqslant 1$ on a

$$\sup_{\theta \in [-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]} |A(e^{i\theta})| \geqslant \frac{1}{n^{L-1}}.$$

Troisième partie

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. On fixe $p, q \in [0,1]$. Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $\mathbf{S}_n$ une somme de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - p\right|\right) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Pour démontrer ce résultat, on fixe $p, q \in [0,1]$ et $(\mathbf{X}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p. On pose alors $\mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$.

12. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \ln(1 - p + pe^x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

- **a**. Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geqslant 0$, exprimer $g''(x)$ sous la forme $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$, où α et β sont des réels positifs pouvant dépendre de x.
- **b**. Montrer que $g''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \geqslant 0$.
- **c**. Montrer que
$$\ln(1 - p + pe^x) \leqslant px + \frac{x^2}{8} \text{ pour tout } x \geqslant 0.$$

13. On suppose dans cette question que $p < q$.

- **a**. Justifier que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - p\right|\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{S}_n \geqslant \tfrac{p+q}{2} n\right).$$
- **b**. Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Pour $u > 0$, calculer $\mathbb{E}(e^{u\mathbf{X}})$.
- **c**. Montrer que pour tout $u > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\mathbf{S}_n \geqslant \tfrac{p+q}{2} n\right) \leqslant e^{-n\left(\frac{p+q}{2}u - \ln(1-p+pe^u)\right)}.$$
  Indication. On pourra admettre que si $(\mathbf{Z}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et prenant un nombre fini de valeurs, alors $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{Z}_i)$.
- **d**. Montrer que $\mathbb{P}(\mathbf{S}_n \geqslant \frac{p+q}{2} n) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}$.

14. Démontrer le **Théorème 3**.

Quatrième partie

Dans cette partie, on s'intéresse à la reconstruction d'une suite de 0 ou 1 à partir d'un échantillon d'observations bruitées (on pourra utiliser le **Théorème 2** et le **Théorème 3**).
Plus précisément, étant donné un élément $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, appelé la source, et un paramètre $p \in]0,1[$ fixé, on considère la variable aléatoire $\mathbf{O}(x)$ à valeurs dans $\{0,1\}^n$ construite comme suit :

- soient $(\mathbf{B}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p ;
- on note $\mathbf{N}$ la variable aléatoire définie par

$$\mathbf{N} = \mathrm{Card}(\{0 \leqslant i \leqslant n-1 : \mathbf{B}_i = 1\})$$

  et $I_0 < I_1 < \cdots < I_{\mathbf{N}-1}$ les éléments de l'ensemble aléatoire $\{0 \leqslant i \leqslant n-1 : \mathbf{B}_i = 1\}$ rangés dans l'ordre croissant ;
- on pose enfin

$$\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \ldots, \mathbf{O}_{n-1}(x)) = (x_{I_0}, x_{I_1}, \ldots, x_{I_{N-1}}, 0, 0, \ldots, 0) \in \{0,1\}^n$$

  avec la convention $\mathbf{O}(x) = (0, 0, \ldots, 0) \in \{0,1\}^n$ si $\mathbf{N} = 0$.

La variable aléatoire $\mathbf{O}(x)$ est appelée *observation bruitée de source* x. Ainsi, $\mathbf{O}(x)$ est obtenue à partir de x en gardant chaque coordonnée avec probabilité p, indépendamment les unes des autres (complétée par des 0 pour obtenir un vecteur de longueur n). Par exemple, si $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1, 1)$ et si $\mathbf{B}_0 = 0$, $\mathbf{B}_1 = 1$, $\mathbf{B}_2 = 0$, $\mathbf{B}_3 = 1$, $\mathbf{B}_4 = 1$ (ce qui arrive avec probabilité $p^3(1-p)^2$), alors $\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \ldots, \mathbf{O}_4(x)) = (x_1, x_3, x_4, 0, 0) = (0, 1, 1, 0, 0)$.

15. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$.

a. Montrer que $\cos(\theta) \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

b. Montrer que $\left|\frac{e^{i\theta}-(1-p)}{p}\right| \leqslant \exp\left(\frac{1-p}{2p^2} \cdot \theta^2\right)$.

Indication. On pourra calculer $\left|\frac{e^{i\theta}-(1-p)}{p}\right|^2$.

16. Soit $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ et considérons une observation bruitée

$$\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \ldots, \mathbf{O}_{n-1}(x))$$

de source x.

a. Si $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n-1$, montrer que $\mathbb{P}(\mathbf{N} \geqslant j+1 \text{ et } I_j = k) = p\binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}$.

b. Montrer que, pour tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $\mathbb{E}[\mathbf{O}_j(x)] = p\sum_{k=j}^{n-1} x_k \binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}$.

c. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{O}_j(x) w^j\right] = p\sum_{k=0}^{n-1} x_k(pw+1-p)^k.$$

Dans la suite, on pose $L_n = \lfloor n^{1/3} \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre réel t.

17. Soient $x, y \in \{0,1\}^n$ tels que $x \neq y$. Posons, pour $z \in \mathbb{C}$, $A_{x,y}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - y_k)z^k$.

a. Justifier l'existence de $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{L_n}, \frac{\pi}{L_n}]$ tel que $|A_{x,y}(e^{i\theta_0})| \geqslant \frac{1}{n^{L_n-1}}$.

b. Démontrer que
$$\sum_{j=0}^{n-1} \left|\mathbb{E}[\mathbf{O}_j(x)] - \mathbb{E}[\mathbf{O}_j(y)]\right| \cdot \left|\frac{e^{i\theta_0} - (1-p)}{p}\right|^j \geqslant \frac{p}{n^{L_n - 1}}.$$

c. Justifier l'existence d'un entier $j_n(x,y)$ tel que $0 \leqslant j_n(x,y) \leqslant n-1$ et
$$\left|\mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(x)] - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(y)]\right| \geqslant \frac{p}{n^{L_n}} \exp\left(-\frac{1-p}{2p^2} \cdot \frac{\pi^2}{L_n^2} n\right).$$

Dans la suite, on fixe une fois pour toutes un entier n qu'il faut considérer comme étant très grand. Pour chaque couple $(x,y) \in (\{0,1\}^n)^2$ tel que $x \neq y$, on fixe un entier $j_n(x,y)$ dont l'existence est prouvée dans la question **17c**.

Soient $T \geqslant 1$ et $(E^1, E^2, \dots, E^T) \in (\{0,1\}^n)^T$. Ainsi, pour $1 \leqslant i \leqslant T$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $E^i_j \in \{0,1\}$. On dit que x est meilleur que y compte tenu de $E^1, E^2, \dots, E^T$ si
$$\left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} E^i_{j_n(x,y)} - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(x)]\right| < \left|\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} E^i_{j_n(x,y)} - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(y)]\right|.$$

On pose alors $R_{n,T}(E^1, E^2, \dots, E^T) = x$ si pour tout $y \neq x$, x est meilleur que y. Si l'on ne peut pas trouver de tel x on pose $R_{n,T}(E^1, E^2, \dots, E^T) = (0, 0, \dots, 0)$.

18. Démontrer que si $T_n \geqslant e^{3\ln(n)n^{1/3}}$ alors pour tout $x \in \{0,1\}^n$ et toute suite
$$\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^{T_n}(x)$$
de T_n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}^n$ mutuellement indépendantes de même loi que $\mathbf{O}(x)$, on a
$$\max_{x\in\{0,1\}^n} \mathbb{P}\left(R_{n,T_n}\left(\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^{T_n}(x)\right) \neq x\right) \leqslant u_n$$
où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Indication. On pourra commencer par écrire, en le justifiant, que
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(R_{n,T}(\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)) \neq x\right)\\ &\qquad\leqslant \sum_{\substack{y\in\{0,1\}^n\\ y\neq x}} \mathbb{P}\left(x \text{ n'est pas meilleur que } y \text{ compte tenu de } \mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)\right).\end{aligned}$$

On a donc démontré qu'en partant de $x \in \{0,1\}^n$ inconnu, on peut retrouver x à partir de la donnée d'une suite
$$\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)$$
de T variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}^n$ mutuellement indépendantes de même loi que $\mathbf{O}(x)$ (qui représentent la donnée de T échantillons bruités obtenus à partir d'une même source), avec grande probabilité à partir de $e^{3\ln(n)n^{1/3}}$ échantillons différents.

* * *

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2001

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose d'établir quelques propriétés des sous-groupes discrets des espaces euclidiens. Dans tout le problème, on désigne par n un entier strictement positif, par E l'espace $\mathbf{R}^n$, par $(\ |\ )$ son produit scalaire usuel et par $\|\ \|$ la norme correspondante. On rappelle les faits suivants :

a) un sous-ensemble L de E est dit *discret* si tout élément x de L est isolé, *i.e.* admet un voisinage V dans E tel que $L \cap V = \{x\}$;

b) un groupe abélien G est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^m$ si et seulement s'il admet une $\mathbf{Z}$-*base*, c'est-à-dire une famille $(e_1, \dots, e_m)$ telle que tout élément g de G s'écrive d'une façon unique sous la forme $g = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i$ avec $k_i \in \mathbf{Z}$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Un sous-groupe L de E est discret si et seulement si l'élément 0 est isolé.

b) Tout sous-groupe discret L de E est fermé dans E.

c) Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}$ sont exactement les sous-ensembles de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in [0, +\infty[$.

2. On désigne par α un nombre réel > 0 et par L le sous-groupe de $\mathbf{R}$, ensemble des réels $m + n\alpha$ où $n, m \in \mathbf{Z}$. Montrer que L est discret si et seulement si α est rationnel.

3. Construire un sous-groupe discret L de $\mathbf{R}^2$ tel que sa première projection sur $\mathbf{R}$ ne soit pas discrète.

4. On se propose ici de démontrer que tout sous-groupe discret L de E est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe $\mathbf{Z}^m$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par L, par m sa dimension, par $(a_1, \dots, a_m)$ une base de F contenue dans L, et par L' le sous-groupe de L engendré par cette base. Enfin on pose

$$P = L \cap \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in [0, 1[\right\} .$$

a) Vérifier que P est un ensemble fini.

b) Etant donné un élément x de L, construire un couple $(y, z) \in L' \times P$ tel que l'on ait $x = y + z$, et démontrer son unicité.

c) Soit encore x un élément de L ; écrivant $kx = y_k + z_k$ (pour k entier > 0), montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dx \in L'$.

d) Conclure.

5. Dans cette question, L est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^m$; ses éléments seront notés $x = (x_1, \dots, x_m)$; on posera $\pi(x) = x_m$.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ et un élément x° de L tel que l'on ait

$$\pi(L) = k\mathbf{Z} = \pi(x^\circ)\mathbf{Z} .$$

b) On suppose ici $\pi(L)$ non réduit à $\{0\}$; étant donné un élément x de L, construire un couple $(p, \widetilde{x}) \in \mathbf{Z} \times L$ tel que l'on ait $\widetilde{x}_m = 0$ et $x = px^\circ + \widetilde{x}$; démontrer son unicité.

c) En déduire que tout sous-groupe discret de E est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^r$.

6. On suppose ici $n = 2$ et on considère deux $\mathbf{Z}$-bases (u_1, u_2), (v_1, v_2) d'un même sous-groupe discret L de E. Comparer les aires des parallélogrammes construits respectivement sur (u_1, u_2) et (v_1, v_2).

Deuxième partie

7. Dans cette question, on désigne par B la base canonique de E et par $GL(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de E. Pour toute partie X de E, on note $L(X)$ le sous-groupe de E engendré par X.

Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que les matrices des éléments de G dans la base B soient à coefficients rationnels. On note GB l'ensemble des vecteurs $g(x)$ où $g \in G$ et $x \in B$.

a) Montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dL(GB) \subset L(B)$.

b) Démontrer l'existence d'une base de E dans laquelle les matrices des éléments de G sont à coefficients entiers.

8. Soit A une matrice à n lignes et n colonnes, à coefficients rationnels, d'ordre fini r (c'est-à-dire que $A^r = I$ et que r est le plus petit entier > 0 ayant cette propriété).

a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est à coefficients entiers.

b) On suppose ici $n = 2$. Montrer que r ne peut prendre que les valeurs $1, 2, 3, 4, 6$ et donner, pour chacune de ces valeurs, un exemple de matrice d'ordre r à coefficients entiers.

Troisième partie

On désigne par $O(E)$ le groupe des automorphismes linéaires orthogonaux de E (ensemble des u de $GL(E)$ tels que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x de E), et par $AO(E)$ l'ensemble des transformations de E de la forme

$$x \mapsto g(x) = u(x) + a \quad \text{où} \quad u \in O(E) \quad \text{et} \quad a \in E \;;$$

on écrit alors $g = (u, a)$. On note e l'élément neutre de $O(E)$.

9. Montrer que $O(E)$ est compact.

10.a) Vérifier que $AO(E)$ est un groupe, écrire sa loi de groupe, préciser son élément neutre, puis l'inverse d'un élément (u, a).

b) Calculer $(u, a)\,(e, b)\,(u, a)^{-1}$.

11. On note ρ le morphisme $AO(E) \to O(E)$ défini par $\rho(u, a) = u$. On fixe un sous-groupe discret L de E qui engendre linéairement E et on note G le sous-groupe de $AO(E)$ formé des éléments g tels que $g(L) = L$.

a) Vérifier que, si un élément (u, a) de $AO(E)$ appartient à G, il en est de même de $(u, 0)$ et (e, a).

b) Montrer que $\rho(G)$ est fini.

c) Déterminer G dans le cas où $n = 2$ et où L est l'ensemble des couples (x_1, x_2) de E tels que $x_1 \in 2\mathbf{Z},\ x_2 \in \mathbf{Z}$.

* *
*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2000 **FILIÈRE PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Le but de ce problème est l'étude d'approximations discrètes de solutions d'équations différentielles avec conditions aux extrémités de l'intervalle de définition.

Première partie

Soit n un entier fixé, $n \geq 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à n lignes, et I la matrice identité à n lignes. On note X_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, les coefficients d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On identifie un vecteur V de $\mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \ldots, v_n$ dans la base canonique, à la matrice colonne $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$.

1. Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose

$$N(X) = \sup_{\substack{V \in \mathbf{R}^n \\ V \neq 0}} \left(\frac{\|XV\|}{\|V\|} \right) .$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que, pour toutes matrices X, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $N(XY) \leq N(X)\, N(Y)$.

Cette propriété est-elle vérifiée si l'on remplace la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(X) = \sup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |X_{ij}| \ ?$$

2. Soit $(X_p)_{p=1,2,\ldots}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $\lim_{p \to +\infty} X_p = X$.

a) Montrer que, pour p assez grand, X_p est inversible.

b) Soit $V \in \mathbf{R}^n$. Montrer que, si X_p est inversible,

$$\|X_p^{-1}V - X^{-1}V\| \leq N(X^{-1})N(X - X_p)\|X_p^{-1}V\| \,.$$

En déduire qu'il existe un entier p_0 et un nombre C indépendant de p tel que, pour $p \geq p_0$,

$$\|X_p^{-1}V\| \leq C\|X^{-1}V\| \,.$$

c) Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} N(X_p^{-1} - X^{-1}) = 0$.

3. On dit qu'une matrice $X = (X_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (P) si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} X_{ii} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n & (P_1) \\ X_{ij} \leq 0 & \text{pour tous } i, j = 1, \dots, n \text{ tels que } i \neq j & (P_2) \\ \sum_{j=1}^{n} X_{ij} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n \,. & (P_3) \end{cases}$$

Soit X une matrice qui possède la propriété (P) et soit $V \in \mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$.

a) Montrer que si $XV = 0$, alors $V = 0$. [On considérera i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |v_i|$.]

b) On suppose que XV a toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer que V a toutes ses composantes positives ou nulles. [On considérera i_1 tel que $v_{i_1} = \min\limits_{i=1,\dots,n} v_i$.]

4. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $X = \lim\limits_{p\to+\infty} X_p$, où chaque X_p est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui possède la propriété (P). Montrer que les coefficients de la matrice inverse X^{-1} sont positifs ou nuls.

Deuxième partie

Soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^2 sur l'intervalle $[0, 1]$.

5.a) Montrer qu'il existe une unique fonction u de classe C^4 sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \,. \end{cases} \tag{1}$$

b) Montrer que si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$.

c) On choisit pour f la fonction constante égale à 1. Déterminer la solution $\widehat{u}$ du problème (1) dans ce cas.

Soit n un entier, $n \geq 1$. On pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et l'on considère la subdivision $(x_i)_{i=0,1,\dots,n+1}$ de l'intervalle $[0,1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et $x_{i+1} - x_i = h$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

6.a) Soit u une fonction à valeurs réelles de classe C^4 sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \ ,$$

où $u^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de u.

b) Que devient cette inégalité dans le cas où u est la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question **5.c)** ?

7. Soit $F \in \mathbf{R}^n$, de composantes $f_1, \dots, f_n$. On désigne par U un vecteur de $\mathbf{R}^n$, de composantes $u_1, \dots, u_n$ et l'on pose $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 0$.

a) Écrire sous forme matricielle $AU = F$ le système (2) linéaire en les inconnues $u_1, \dots, u_n$:

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i \ , \quad 1 \leq i \leq n \ . \tag{2}$$

b) Montrer que, pour tout vecteur V de $\mathbf{R}^n$, le produit scalaire canonique $(AV|V)$ peut s'écrire comme une somme de carrés de nombres réels.

c) En déduire que la matrice A est inversible.

8.a) Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de A. Montrer que les coefficients B_{ij} de B sont positifs ou nuls.

b) Soit $\widehat{F}$ le vecteur de composantes toutes égales à 1. Déterminer les composantes de $B\widehat{F}$ à l'aide des valeurs de la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question **5.c)**. En déduire que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \leq \frac{1}{8} \ .$$

9. On suppose que $(u_1, \dots, u_n)$ est la solution du système (2) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, et l'on désigne par $u(x_1), \dots, u(x_n)$ les valeurs prises en $x_1, \dots, x_n$ par la solution u du problème (1).

a) Donner une majoration de $|u_i - u(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \dots, n$, en fonction de h et de la fonction f''.

b) En quel sens peut-on dire que la solution du problème linéaire (2) avec $f_i = f(x_i)$ approxime la solution du problème (1) ?

c) On choisit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{25}{\sqrt{x^4 + 5}}$.

Trouver une valeur de l'entier n qui assure $|u_i - u(x_i)| < 10^{-4}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

Troisième partie

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ comme dans la deuxième partie. Pour tout entier $p \geq 1$, on considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \dfrac{1}{p^2}u = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \, . \end{cases} \tag{3}$$

10.a) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, il existe une unique fonction $u^{[p]}$ de classe C^4 sur $[0,1]$ qui est solution du problème (3).

b) Montrer que la suite de fonctions $(u^{[p]})_{p\geq 1}$ tend simplement, quand p tend vers $+\infty$, vers une fonction u de classe C^4 sur $[0,1]$, et que u est solution du problème (1) de la deuxième partie.

11. On choisit pour f la fonction constante égale à 1 et l'on note $\widehat{u}^{[p]}$ la solution du problème (3) dans ce cas.

a) Déterminer $\widehat{u}^{[p]}$.

b) Pour tout entier $p \geq 1$, étudier les variations de la fonction $x \in [0,1] \mapsto \widehat{u}^{[p]}(x) \in \mathbf{R}$.

c) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \widehat{u}^{[p]}(x) < \frac{1}{8}$.

12. On reprend les notations de la deuxième partie.

a) Montrer que pour chaque entier $p \geq 1$, le système linéaire

$$(A + \frac{1}{p^2}I)U = F \tag{4}$$

a une solution unique, notée $U^{[p]}$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{p\to+\infty} U^{[p]}$?

b) Soit $(u_1^{[p]}, \dots , u_n^{[p]})$ la solution du système (4) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Donner une majoration de $|u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \dots , n$, en fonction de h, p, f et f''.

* *
*

SUJET 13

SUJET 14

Pas d'origine

Étude de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$

Objectifs

L'objectif du problème est l'étude de la fonction de variable complexe

$$f : z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}.$$

On notera D_f son domaine de définition (i.e. l'ensemble des z complexes tels que la série numérique $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge).

Préliminaire

1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente.

(a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n\, x^n$?

(b) Montrer l'existence de $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, x^n$ et déterminer sa valeur.

On pourra se ramener au cas où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Partie I : Rayon de convergence, étude élémentaire sur l'axe réel

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.

3. Déterminer $D_f \cap \mathbb{R}$. Préciser le signe de $f(-1)$.

4. Montrer que la fonction de variable réelle $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[-1, 1[$.

5. Montrer que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Partie II : Comportement asymptotique au voisinage de 1

Pour $x \in]0,1[$, on pose ici

$$I(x) := \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

6. Montrer que $x \mapsto f(x) - I(x)$ est bornée sur $]0,1[$.

7. Démontrer que

$$I(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 1^-.

8. On se propose ici de retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$ existe, et la calculer.

Dans la suite, on admet que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

(b) Montrer que $x \mapsto f(x)^2$ est développable en série entière autour de 0. On note $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ la série entière associée.

(c) Montrer l'équivalent suivant au voisinage de 1^- :

$$f(x)^2 \sim \frac{\pi}{1-x}.$$

Retrouver ainsi le résultat de **7**.

L'objectif, dans la fin de cette partie, est de poursuivre le développement asymptotique démarré en **7**.

9. Exhiber un réel K tel que

$$I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{1-x}} + K + o_{x\to 1^-}(1).$$

10. Établir que

$$f(x) - I(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right].$$

11. En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{1-x}} + C + o_{x\to 1^-}(1).$$

12. Exprimer C à l'aide de $f(-1)$.

Partie III : Prolongement analytique sur $\mathbb{C} \smallsetminus [1, +\infty[$

13. Pour quels complexes z l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^{t^2} - z}$$

est-elle définie ? Lorsqu'elle est définie, on la notera $\varphi(z)$ et l'on posera

$$\widetilde{f}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, z\, \varphi(z).$$

14. Établir :

$$\forall z \in D_o(0,1), \quad f(z) = \widetilde{f}(z).$$

On pourra utiliser un développement en série dans l'intégrale.

15. Montrer qu'il existe une fonction continue de $\mathbb{C} \smallsetminus [1, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ coïncidant avec f sur $D_o(0,1)$.

16. On fixe $a \in \mathbb{C} \smallsetminus [1, +\infty[$ et l'on note $\delta := d\big(a, [1, +\infty[\big)$ (distance pour le module).

(a) Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{(e^{t^2} - a)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $b_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^{t^2} - a)^n}$.

(b) Montrer, pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < \delta$, la formule :

$$\varphi(a + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1} h^n.$$

(c) En déduire que $\widetilde{f}$ est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{C} \smallsetminus [1, +\infty[$.

SUJET 14

ENS ULC 2001 PC

Avertissement : Les labels **Qn**, avec $0 \leq n \leq 13$ indiquent les questions, certaines d'entre elles étant découpées en sous-questions numérotées de 1 à j, avec $j \leq 5$.

Notations

On désigne par R le corps des nombres réels. Le problème concerne l'étude des matrices carrées à coefficients réels, dont l'ensemble est noté $M_n(\mathrm{R})$. La matrice identité est notée I_n. On notera $O(n)$ le groupe orthogonal et $S(n)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à n lignes. Rappelons que $O(n)$ est l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathrm{R})$ qui satisfont ${}^tMM = I_n$ ou, ce qui revient au même, $M\,{}^tM = I_n$. Si $M \in M_n(\mathrm{R})$, on note P_M le polynôme caractéristique de M, défini par $P_M(X) = \det(XI_n - M)$.

On identifie canoniquement les vecteurs de R^n aux matrices colonnes à n lignes. En particulier, $M_1(\mathrm{R})$ est identifié à R.

On dit que P, appartenant à $M_n(\mathrm{R})$, est une matrice de permutation s'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, telle que $p_{ij} = 1$ si $i = \sigma(j)$, $p_{ij} = 0$ sinon.

Q1 Soit $D \in M_n(\mathrm{R})$ une matrice diagonale, $x \in \mathrm{R}^n$ un vecteur et $a \in \mathrm{R}$ un nombre. On forme une matrice $N \in M_{n+1}(\mathrm{R})$ par

$$N = \begin{pmatrix} & & x_1 \\ & D & \vdots \\ & & x_n \\ x_1 \cdots x_n & & a \end{pmatrix}.$$

1. On note $d_1, \ldots, d_n$ les coefficients diagonaux de D. Montrer que

$$P_N(X) = \left(X - a - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{X - d_j}\right) P_D(X).$$

2. On suppose que $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ et que $x_j \neq 0$ pour tout j. Etudier les variations de la fonction $t \mapsto P_N(t)/P_D(t)$. En déduire que les valeurs propres $\mu_0, \ldots, \mu_n$ de N sont réelles et que, rangées dans l'ordre croissant, elles satisfont

$$\mu_0 < d_1 < \mu_1 < \cdots < d_n < \mu_n.$$

On admettra que, dans le cas général (les x_j pouvant s'annuler, et $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$), on a encore

$$\mu_0 \leq d_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq d_n \leq \mu_n.$$

Q2 Réciproquement, soit D comme ci-dessus avec $d_1 \leq \cdots \leq d_n$. On se donne des nombres réels $\mu_0, \ldots, \mu_n$, satisfaisant

$$\mu_0 \leq d_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq d_n \leq \mu_n.$$

1. Montrer que la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{\prod_{l=0}^{n}(X - \mu_l)}{\prod_{j=1}^{n}(X - d_j)}$$

n'a que des pôles simples, qu'on identifiera.

2. En déduire qu'il existe des nombres $c_j \in \mathrm{R}$ tels que

$$F(X) = X - a + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{X - d_j}, \quad \text{où} \quad a = \sum_{l=0}^{n} \mu_l - \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

3. On commence par le cas simple où $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$. Montrer que chaque c_j est négatif ou nul.
4. Dans le cas général, montrer qu'on peut choisir les c_j négatifs ou nuls.
5. En déduire qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{R}^n$ tel que les nombres $\mu_0, \ldots, \mu_n$ soient les valeurs propres de la matrice N définie à la question Q1.

Q3 Soit $M \in S(n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, rangées dans l'ordre croissant.

1. Soit $x \in \mathrm{R}^n$ un vecteur et $a \in \mathrm{R}$ un nombre. Soit $\mu_0, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres, rangées dans l'ordre croissant, de

$$N = \begin{pmatrix} & & x_1 \\ & M & \vdots \\ & & x_n \\ x_1 \cdots x_n & & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\mu_0 \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \mu_n.$$

2. Réciproquement, soit $\mu_0, \ldots, \mu_n$ des nombres réels satisfaisant

$$\mu_0 \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \mu_n.$$

Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{R}^n$ et un nombre $a \in \mathrm{R}$, tels que $\mu_0, \ldots, \mu_n$ soient les valeurs propres de la matrice N définie au 1.).

Spectre et diagonale des matrices symétriques

Pour $n \geq 1$, $C(n)$ désigne l'ensemble des suites *croissantes* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de n nombres réels. Si $a \in C(n)$ et $1 \leq k \leq n$, on note $s_k(a) = a_1 + \cdots + a_k$. Si $a, b \in C(n)$, on dit que b *majore* a, et on note $a \prec b$, si

- $s_k(a) \leq s_k(b)$, pour tout $k = 1, \ldots, n-1$,
- $s_n(a) = s_n(b)$.

Q4 Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $C(n)$.

Tournez la page S.V.P.

Q5 Soit $a \in C(n)$ et $\alpha = \frac{1}{n}s_n(a)$. Montrer que $a \prec b$, où $b = (\alpha, \dots, \alpha)$.

Q6 Si M appartient à $S(n)$, on note $\mathrm{diag}(M)$ la liste de ses coefficients diagonaux, rangés dans l'ordre croissant, et $\mathrm{spec}(M)$ celle de ses valeurs propres, rangées dans l'ordre croissant.

Montrer que $\mathrm{spec}(M) \prec \mathrm{diag}(M)$. On pourra faire une récurrence sur n.

Q7 Soit $n \geq 2$ et $a, b \in C(n)$, vérifiant $a \prec b$. Notons Δ le sous-ensemble de $C(n-1)$ formé des suites d qui vérifient

- $a_1 \leq d_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq d_{n-1} \leq a_n$,
- $s_k(d) \leq s_k(b)$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$.

1. Montrer que Δ est un compact non vide de R^{n-1}. En déduire qu'il existe un d^* dans Δ tel que $s_{n-1}(d^*) \geq s_{n-1}(d)$ pour tout $d \in \Delta$.
2. On définit un entier r de la façon suivante : si pour tout j compris entre 1 et $n-1$, $s_j(d^*) < s_j(b)$, on pose $r = 0$. Sinon, r est le plus grand entier entre 1 et $n-1$ tel que $s_r(d^*) = s_r(b)$.
   (a) Montrer que $d_j^* = a_{j+1}$ pour tout $j > r$.
   (b) En déduire que $s_{n-1}(d^*) \geq s_{n-1}(b)$.
   (c) Conclure qu'il existe $c \in C(n-1)$ telle que $a_1 \leq c_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq c_{n-1} \leq a_n$ et $c \prec \beta$, où $\beta = (b_1, \dots, b_{n-1})$.

Q8 Montrer, par récurrence sur n, que si $\delta, \lambda \in C(n)$ satisfont $\lambda \prec \delta$, alors il existe $M \in S(n)$ telle que $\delta = \mathrm{diag}(M)$ et $\lambda = \mathrm{spec}(M)$.

Matrices doublement stochastiques

On dit qu'une matrice $M \in M_n(\mathrm{R})$ est *doublement stochastique* si

- ses coefficients m_{ij} sont positifs ou nuls,
- $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$ pour tout i,
- $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$ pour tout j.

On note e le vecteur de R^n dont toutes les composantes valent un. On désigne par DS_n l'ensemble des matrices doublement stochastiques.

Si $x \in \mathrm{R}^n$, on désigne par $\hat{x}$ la suite des coordonnées de x, rangées dans l'ordre croissant ; on a $\hat{x} \in C(n)$. Si $x, y \in \mathrm{R}^n$, on convient de noter encore $x \prec y$ lorsque $\hat{x} \prec \hat{y}$.

Q9 Soit $M \in DS_n$.

1. Montrer que e est un vecteur propre de M et de ${}^tM$.
2. Soit P une matrice de permutation. Montrer que PM et MP appartiennent à DS_n.

Q10 Soit $M \in M_n(\mathrm{R})$. On suppose que $x \prec Mx$ pour tout $x \in \mathrm{R}^n$. Montrer que $M \in DS_n$.

Q11 Soit $a, b \in C(n)$, satisfaisant

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j - t| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j - t|, \quad \forall t \in \mathrm{R}.$$

1. Montrer d'abord que $s_n(a) = s_n(b)$.
2. Choisissant t dans l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, montrer alors que $s_k(a) \leq s_k(b)$.
3. En déduire que si $x, y \in \mathrm{R}^n$ satisfont

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j - t| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - t|, \quad \forall t \in \mathrm{R},$$

alors $x \prec y$.

Q12 On munit R^n de la norme

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Soit $M \in DS_n$.

1. Montrer que $\|Mx\| \leq \|x\|$, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$.
2. Appliquer cette inégalité et la question Q11.3 pour montrer que $x \prec Mx$ pour tout $x \in \mathrm{R}$.

Q13

1. Soit $U \in O(n)$. On définit une matrice $A \in M_n(\mathrm{R})$ par $a_{ij} = u_{ij}^2$. Montrer que $A \in DS_n$.
2. Soit $x, y \in \mathrm{R}^n$ deux vecteurs tels que $x \prec y$. Utilisant le 1.) et la question Q8, montrer qu'il existe une matrice $A \in DS_n$ telle que $y = Ax$.