1 Continuité, dérivées

Proposition 1.0.1 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$) *Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que*

(i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.

(ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

OU

(iii) bis [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Proposition 1.0.2 (Dérivation de $x \mapsto \int_J f(x,t)dt$) *Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que*

(i) [Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

(ii) [Régularité de f par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.

(iii) [Régularité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

OU

(iv) bis [Domination locale] Pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J, à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Corollaire 1.0.1 ($x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ **de classe** $\mathcal{C}^k$) *Soient* $f : I \times J \to \mathbb{K}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *telles que*

(i) [Caractère $\mathcal{C}^k$ *en le paramètre] Pour tout* t *dans* J, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I.

(ii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* j *dans* $[\![0, k-1]\!]$ *et pour tout* x *dans* I, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* J.

(iii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* x *dans* I, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J.

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ_k *continue par morceaux sur* J, *à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi_k(t).$$

OU

(iv bis) [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ *inclus dans* I, *il existe une fonction* φ_k *continue par morceaux sur* J, *à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J,\ \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi_k(t).$$

Alors, $g : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *et*

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \forall x \in I,\ g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$

Corollaire 1.0.2 ($x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ **de classe** $\mathcal{C}^\infty$) *Soient* $f : I \times J \to \mathbb{K}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$ *telles que*

i) [Caractère $\mathcal{C}^\infty$ *en le paramètre] Pour tout* t *dans* J, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* I.

ii) [Régularité des dérivées $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ *par rapport à la variable d'intégration] Pour tout* j *dans* $\mathbb{N}$ *et pour tout* x *dans* I, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* J.

iii) [Domination] Pour tout j *de* $\mathbb{N}$, *existe une fonction* φ_j *continue par morceaux sur* J, *à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \right| \leq \varphi_j(t).$$

OU

iii) bis [Domination locale] Pour tout segment $[a,b]$ *inclus dans* I, *pour tout* j *de* $\mathbb{N}$, *existe une fonction* φ_j *continue par morceaux sur* J, *à valeurs réelles positives, intégrable sur* J *telle que*

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J,\ \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \right| \leq \varphi_j(t).$$

Dans ce cas g *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* I *et :* $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$.

Remarque 1.0.1

1. *La domination locale s'utilise souvent lorsque* I *est un intervalle ouvert ou non borné.*
2. *Dans le corollaire précédent, on peut avoir la domination qu'à partir d'un certain rang* k, *mais il faut montrer alors que les fonctions* $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *sont intégrables sur* J *pour* $j < k$.

Exemple 1.0.1 *1. Trouver l'expression de* $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$*, par dérivation.*

2. $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2 Continuité dans un EVN

Proposition 2.0.1 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x,t)$ définie sur un EVN) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times J$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.

(ii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii) Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times J \quad |f(x,t)| \ \leq \ \varphi(t).$$

Alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J, et la fonction F définie sur A par $F(x) = \int_J f(x,t)\, dt$ est continue sur A.

L'hypothèse de domination peut être remplacée par une hypothèse de domination au voisinage de tout point :

(iii bis) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a dans A (par exemple une boule fermé $\overline{B}(a,r)$) et une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in V \times J \quad |f(x,t)| \ \leq \ \varphi(t).$$

Exemple 2.0.1 *Montrer que* $F : z \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z\sqrt[3]{t}}}{1+it^{3/4}} dt$ *est continue sur* $H = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$.

3 Théorème de convergence dominé à paramètre continu

Théorème 3.0.1 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu) *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle J. Soit $\lambda_0 \in \overline{I}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :*

1. *pour tout $\lambda \in I$, la fonction f_λ est continue par morceaux sur J ;*
2. *pour tout $u \in J$, on a : $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(u) = f(u)$, et la fonction f ainsi définie est continue par morceaux sur J ;*
3. *(Domination) il existe une fonction φ continue par morceaux positive et intégrable sur J telle que pour tout $\lambda \in I$ et pour tout $u \in J$: $|f_\lambda(u)| \leq \varphi(u)$ (hypothèse de domination).*

Alors, les fonctions f_λ et leur limite f sont intégrables sur J et :

$$\int_J \lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(u) du \ = \ \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_J f_\lambda(u) du = \int_J f(u) du.$$

Remarque 3.0.1

1. *(IMPORTANT) Ce résultat sera souvent appliqué lorsque l'on cherchera $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_J f(\lambda,t) dt$. Il suffira de poser $f_\lambda : t \mapsto f(\lambda,t)$.*
2. *Ce résultat sert surtout lorsque $\lambda_0 = \pm\infty$, car sinon on pourra appliquer le plus souvent les propositions précédentes.*

   Si λ_0 est réel, ce théorème permettra par exemple de prolonger par continuité $\lambda \mapsto \int_J f(\lambda,t) dt$ en λ_0.

Exemple 3.0.1 *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = l_\infty$ et $\lim\limits_{0^+} f = l_0$ soient des réels. On pose $L(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$, pour $p \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} pL(p) = l_0$ et $\lim\limits_{p \to 0^+} pL(p) = l_\infty$.*