1 Espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 (Symétrie, bilinéarité, positivité, séparation) *Soit φ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si φ*

1. *est **symétrique** : $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.*
2. *est **bilinéaire** : pour tout u, v dans E, $u \mapsto \varphi(u,v)$ et $v \mapsto \varphi(u,v)$ sont linéaires.*
3. *est **positive** : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) \geq 0$.*
4. *possède la propriété de **séparation** : $\forall u \in E,\ \varphi(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0$.*

Définition 1.1.2 (Espace euclidien, espace préhilbertien) *Si φ est un produit scalaire, on dit que E muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien. De plus, si E est de dimension finie, alors E est un espace euclidien.*

Rappelons les produits scalaires usuels sur certains espaces :

1. $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$, on pose $(x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
2. $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose $(X|Y) = X^T Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour A, B, on pose : $(A|B) = tr(A^T B)$.
4. On note $\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Pour f et g dans $\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_I fg$.

1.1.2 Normes

Définition 1.1.3 (Norme euclidienne) *Pour x dans E, on note $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ que l'on appelle norme euclidienne de x.*

Proposition 1.1.1 (Développement d'une norme) *Soient $x, y, x_1, ..., x_n =\in E^2$. On a :*

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$.
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$.
3. $(x|y) = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$ *(identité de polarisation)*
4. $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i | \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i | \sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i|x_j)$.

1.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) ***(CCP 76 Énoncé+démo)*** *Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. Alors on a :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y)^2 \leq \|x\|^2 \times \|y\|^2 \quad \textit{soit :}\ \forall (x,y) \in E^2,\ |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

De plus on a : $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exemple 1.1.1 *1. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| = |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

2. Pour f et g dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, on a : $\left|\int_a^b fg\right| = |(f|g)| \leq \|f\| \times \|g\| = \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}.$

1.2 Orthogonalité

1.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 1.2.1 (Vecteurs orthogonaux) *Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si : $(x|y) = 0$.*

Exemple 1.2.1 *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que* $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^T A)$.

Définition 1.2.2 (Famille de vecteurs orthogonales et orthonormales) *Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est :*

1. *orthogonale si : $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) = 0$.*
2. *orthonormale si : $\forall (i,j) \in I^2,\ (x_i|x_j) = \delta_{ij}$ ($\|x_i\| = 1$ et $(x_i|x_j) = 0$ si $i \neq j$).*

Proposition 1.2.1 (Théorème de Pythagore généralisé) *Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille orthogonale. Alors on a : $\left\|\sum_{i=1}^{p} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$.*

Proposition 1.2.2 *Une famille finie orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.*

Exemple 1.2.2 *Sur $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ on définit le produit scalaire $(f|g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.*
Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose les fonctions $f_n : x \mapsto \sin(nx)$ et $g_m : x \mapsto \cos(mx)$. La famille $(f_n, g_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est orthogonale et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\| = \|g_n\| = 1$ et $\|g_0\| = \sqrt{2}$.

1.2.2 Bases orthonormales dans un espace euclidien

$(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien de dimension n avec n dans $\mathbb{N}^*$.

Théorème 1.2.1 (Existence d'une base orthonormée) *Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.*

Proposition 1.2.3 (Complétion d'une famille orthonormale) *On suppose que E est un espace euclidien. Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille orthonormale de E. On peut la compléter en une base orthonormale de E.*

Proposition 1.2.4 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)
$\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$, où $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ sont dans $\mathbb{R}$. On a :

1. *$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.*
2. *On a $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.*
3. *$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = (x|u_k)$ et donc $x = \sum_{i=1} (x|u_i) u_i$.*

Remarque 1.2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de E. Soit $A = Mat_{\mathcal{U}}(f) = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$. On a alors $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ij} = (u_i|f(u_j)) = (f(u_j)|u_i)$.*

1.2.3 Orthogonal d'une partie

$(E,(\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 1.2.3 (Orthogonalité) 1. *Soit $x \in E$. L'ensemble $\{y \in E, (x|y) = 0\}$ est appelé l'orthogonal de x et il est noté $x^\perp$.*

2. *Soit $X \subset E$ une partie de E non vide. L'ensemble $\{y \in E / \forall x \in X,\ (x|y) = 0\} = \bigcap_{x \in X} x^\perp$ est appelé orthogonal de X et il est noté $X^\perp$ qui est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.2.5 (Orthogonalité et somme directe) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors on a : $F \cap F^\perp = \{0\}$. Ainsi la somme $F + F^\perp$ est directe.*
Si on a $F \oplus F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E.

Remarque 1.2.2 *ATTENTION, en dimension infinie, F et $F^\perp$ ne sont pas toujours supplémentaires.*

Proposition 1.2.6 (Orthogonal en dimension finie) *Soit F un sous-espace vectoriel de <u>dimension finie</u> de E. Alors $F \oplus F^\perp = E$.*

Corollaire 1.2.1 (Expression de la décomposition suivant $F \oplus F^\perp = E$) 1. *Soit $x \in E$ et $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormale de F. La décomposition suivant $F \oplus F^\perp$ est donnée par :*

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p}(x|f_i)f_i}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^{p}(x|f_i)f_i}_{\in F^\perp}.$$

2. *Si E est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel de E, on a :*
   - $F \oplus F^\perp = E$.
   - $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$

   En effet F est de dimension finie en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 1.2.3 *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(M, N) \mapsto tr(M^T N)$, montrer que : $(A_n(\mathbb{R}))^\perp = S_n(\mathbb{R})$.*

1.3 Projections orthogonales et applications

1.3.1 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

$(E,(\cdot,\cdot))$ désigne un espace préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel de <u>dimension finie</u> de E. On a donc : $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 1.3.1 (Projection orthogonale) *On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. On la note p_F et pour $x = y + z$ avec y dans F et z dans $F^\perp$, on a $p_F(x) = y$. Dans ce cas $\mathrm{Ker}\,(p) = (\mathrm{Im}\,(p))^\perp$.*

Proposition 1.3.1 (Formule de la projection orthogonale) *Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormée de F. Alors on a :*
$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{j=1}^{p}(x|f_j)f_j$ *et* $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{p}(x|f_j)^2$.

Remarque 1.3.1 *Pour obtenir la projection orthogonale d'un vecteur x sur F, on a deux méthodes :*
- *on dispose d'une base orthonormée $(f_1, ..., f_p)$ de F et dans ce cas, on peut utiliser directement la formule : $p_F(x) = \sum_{j=1}^{p}(x|f_j)f_j$ (par éventuellement le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).*

- *on dispose d'une base* $(e_1, ..., e_p)$ *de* F *qui n'est pas forcément orthonormée. On cherche la projection orthogonale de* x *sur* F *sous la forme* $p_F(x) = y = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$ *(qui est dans* F*). On doit donc avoir* $x - y$ *dans* $F^\perp = (\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p))^\perp$ *ce qui revient à avoir :* $\forall i \in [\![1, p]\!],\ (x - y|e_i) = 0$*, soit le système :* $\left\{ \begin{array}{c} (x|e_1) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (e_j|e_1) = 0 \\ \vdots \\ (x|e_p) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (e_j|e_p) = 0 \end{array} \right.$*, où l'on doit déterminer les* λ_j*.*

Définition 1.3.2 (Symétrie orthogonale) *On appelle symétrie orthogonale par rapport à* F *la symétrie sur* F *parallèlement à* $F^\perp$*. On la note* s_F *et pour* $x = y + z$ *avec* y *dans* F *et* z *dans* $F^\perp$*, on a :* $s_F(x) = y - z$*.*
Dans ce cas $\mathrm{Ker}\,(s + id_E)^\perp = \mathrm{Ker}\,(s - id_E)$*.*

Remarque 1.3.2 $s_F = 2p_F - Id_E$.

Définition 1.3.3 (Réflexion) *Soit* $s \in \mathcal{L}(E)$*. On dit que* s *est une réflexion lorsque* s *est une symétrie par rapport à un espace vectoriel* H *de dimension* $n - 1$*.*

1.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Théorème 1.3.1 (Procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt) *Soit* $(e_1, ..., e_n)$ *une famille libre de* E*. Alors il existe une famille orthonormale* $(u_1, ..., u_n)$ *telle que :*

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

<u>Rappel de la méthode :</u> On procède par récurrence, en construisant d'abord, u_1, puis u_2,..., jusqu'à u_n.

- On pose $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.
- À partir de e_2, on doit construire u_2 qui doit être orthogonal à u_1 et de norme 1. Ainsi on enlève d'abord la projection orthogonale de e_2 sur u_1. On pose donc $v_2 = e_2 - (e_2|u_1)u_1$. Ainsi on a bien $(v_2|u_1) = 0$. Ensuite il faut normaliser v_2 et on pose $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$.
- Supposons que l'on ait construit $(u_1, ..., u_p)$. À partir de e_{p+1}, nous devons construire u_{p+1} qui doit être orthogonal à $u_1, ..., u_p$ et de norme 1. On commence donc par retrancher à e_{p+1}, sa projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$. Ainsi on pose : $v_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (e_{p+1}|u_i)u_i$. Ainsi on a bien : $\forall j \in [\![1, p]\!],\ (v_{p+1}|u_j) = 0$. Il reste maintenant à normaliser v_{p+1} et on pose $u_{p+1} = \dfrac{v_{p+1}}{\|v_{p+1}\|}$. Et on continue ainsi de suite jusqu'à u_n.

Exemple 1.3.1 *Déterminer dans* $\mathbb{R}^4$ *la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale* p *sur le plan vectoriel* (P) *d'équation :* $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z - t & = & 0 \\ x + 3y + z - t & = & 0 \end{array} \right.$.

1.3.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Ici, F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$ (les espaces ne sont pas forcément de dimension finie).

Définition 1.3.4 (Distance à un sous-espace vectoriel) *Soit* $x \in E$*. On pose*
$d(x, F) = \inf\{\|x - f\|,\ f \in F\}$*. On appelle ceci distance de* x *à* F*.*

Proposition 1.3.2 (Projection orthogonale et distance) *Soit $x \in E$. Alors on a :*
$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.
L'unique vecteur y_0 de F vérifiant $\|x - y_0\| = d(x,F)$ est : $p_F(x)$.

Remarque 1.3.3 *IMPORTANT : voici une méthode pour calculer une distance. Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base orthonormée de F. Nous avons : $p_F(x) = \sum_{j=1}^{p} (x|f_j) f_j$. De plus $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ qui est la décomposition suivant $F \oplus F^\perp$. Ainsi grâce au théorème de Pythagore :*
$d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{p} (x|f_j)^2$, *car la base $(f_1, ..., f_p)$ est orthonormée.*
Alors on a :

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{p} (x|f_j)^2}.$$

Exemple 1.3.2 *On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X],\ \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire. On rappelle que : $\forall p,q \in \mathbb{N},\ (X^p|X^q) = (p+q)!$.*
Déterminer ensuite $d = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

1.3.4 Applications aux hyperplans et aux formes linéaires

Théorème 1.3.2 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit f une forme linéaire de E. Alors il existe un unique a dans E tel que : $\forall x \in E,\ f(x) = (x|a) = (a|x)$. On note $f = (\cdot|a) = (a|\cdot)$.*

Corollaire 1.3.1 (Description des hyperplans dans un espace euclidien) *Soit H un hyperplan de E. Il existe a dans E non nul tel que : $H = \{x \in E,\ (a|x) = 0\} = a^\perp$.*
Un tel vecteur a est appelé vecteur normal à l'hyperplan H.

Proposition 1.3.3 (Projection orthogonale sur un hyperplan) *Soit $H = a^\perp = (\mathrm{Vect}(a))^\perp$, un hyperplan, avec $a \in E$ non nul. L'expression de la projection orthogonale sur H est : $x \mapsto x - \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a$.*

Proposition 1.3.4 (Distance à un hyperplan) *Soit $a \in E \setminus \{0\}$ et $H = a^\perp$ un hyperplan de E. Soit $x \in E$. On a : $d(x,H) = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}$.*

Proposition 1.3.5 (Expression d'une réflexion) *Soit $a \in E \setminus \{0\}$. La réflexion par rapport à $H = a^\perp$ est : $s_H : x \mapsto x - 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2} a$.*

2 Adjoint d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension n.

Définition 2.0.1 (Adjoint d'un endomorphisme) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$:*

$$\forall x \in E,\ (y|u(x)) = (u(x)|y) = (x|u^*(y)) = (u^*(y)|x).$$

Exemple 2.0.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
ii. $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
iii. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Proposition 2.0.1 (Propriétés de l'adjoint) *Soient* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
2. $u^{**} = u$.
3. $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$.

Proposition 2.0.2 (Matrice de l'adjoint) *Soient* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *une base* *orthonormée* *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On pose* $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. *Alors*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T.$$

Remarque 2.0.1 *On en déduit que* $\mathrm{rg}\,(u^*) = \mathrm{rg}\,(u)$, $tr(u^*) = tr(u)$, $\det(u^*) = \det(u)$, *puis* $\chi_{u^*} = \chi_u$.

Proposition 2.0.3 (Stabilité de l'orthogonale par l'adjoint) *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et soit* F *un sous-espace vectoriel stable par* u : $u(F) \subset F$. *On a alors*

$$u^*(F^\perp) \subset F^\perp.$$

3 Matrices orthogonales et isométries vectorielles

Dans tout ce paragraphe, E désignera un espace euclidien de dimension n.

3.1 Isométries vectorielles

3.1.1 Définitions générales, caractérisations et premières propriétés

Définition 3.1.1 (Isométrie vectorielle) *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base orthonormée de* E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que* f *est une isométrie vectorielle, si l'un des caractérisations équivalentes suivantes est vérié :*

1. *conservation de la norme :* $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.
2. *conservation du produit scalaire :* $\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x)|f(y)) = (x|y)$.
3. $u(\mathcal{B}) = (f(e_1), ..., f(e_n))$ *est une base orthonormée de* E.
4. $f^* = f^{-1}$.

On note $O(E)$ *l'ensemble des automorphismes orthogonaux de* E, *que l'on appelle groupe orthogonal.*

Exemple 3.1.1 *Les symétries orthogonales et les réflexions sont des isométries vectorielles.*

Proposition 3.1.1 (Structure de $O(E)$**)** $(O(E), \circ)$ *est un sous-groupe de* $(GL(E), \circ)$.

Exemple 3.1.2 *Soit* $f \in O(E)$. *On a :* $\mathrm{Ker}\,(f - Id_E) = (\mathrm{Im}\,(f - Id_E))^\perp$, *puis que :*
$\mathrm{Im}\,(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - Id_E) = E$.

Proposition 3.1.2 (Isométries vectorielles et sous-espaces stables) *Soit* $f \in O(E)$ *et* F *un sous-espace vectoriel stable par* f *(c'est-à-dire* $f(F) \subset F$*). Alors :* $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

3.1.2 Matrices orthogonales

Définition 3.1.2 (Matrice orthogonale) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que* A *est une matrice orthogonale si l'une des caractérisations suivantes est vérifiée :*

1. $A^T A = I_n \Leftrightarrow AA^T = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.
2. *les colonnes* $(C_1, ..., C_n)$ *de* A *forment une base orthonormée de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire usuel.*
3. *les lignes* $(L_1, ..., L_n)$ *de* A *forment une base orthonormée de* $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ *pour le produit scalaire usuel.*
4. A *est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.*

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.

Proposition 3.1.3 (Matrice d'un automorphisme orthogonal) *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.*
f est dans $O(E)$ si et seulement si : A est dans $O(n)$.

Exemple 3.1.3 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $M_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1\leq i,j\leq n}$.*
Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'}$, puis en déduire que $M^T = M_{\sigma^{-1}}$.

Proposition 3.1.4 *Soient $A \in O(n)$ et $f \in O(n)$. On a : $\det(A) \in \{1, -1\}$ et $\det(f) \in \{1, -1\}$.*

Proposition 3.1.5 (Structure de $O_n(\mathbb{R})$) *$(O_n(\mathbb{R}), .)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 3.1.4
1. *Soit $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in O(n)$. Montrer que : $\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n$.*
2. *$O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte.*

Exemple 3.1.5 *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour quels a, b a-t-on A dans $O(3)$? Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A ?*

Comme le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1, nous allons classer les matrices orthogonales et les isométries en deux sous-ensembles. Ceci motive la définition suivante :

Définition 3.1.3 ($SO(n)$ et $SO(E)$)
1. *L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$ est appelé groupe spécial orthogonal et on le note $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.*
   Les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales positives et les éléments de $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales négatives.
2. *On note $SO(E) = \{f \in O(E),\ \det(f) = 1\}$ appelé groupe spécial orthogonal et ses éléments sont nommés isométries positives.*
   Les éléments de $O(E) \setminus SO(E)$ sont appelés isométries négatives.

Remarque 3.1.1
1. *Une réflexion est une isométrie négative.*
2. *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. Ces deux bases ont la même orientation (c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) > 0$) si et seulement si la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est dans $SO(n)$.*

Proposition 3.1.6 (Structure de $SO(n)$ et $SO(E)$) *$(SO(n), .)$ et $(SO(E), \circ)$ sont des groupes.*

3.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Proposition 3.2.1 (Description de $O(2)$) *Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.*

Corollaire 3.2.1 (Description de $SO(2)$) *On a : $SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.*

Corollaire 3.2.2 (Commutativité de $SO(2)$) *Pour toute matrice A, B de $SO(2)$, on a : $AB = BA$.*

Définition 3.2.1 (Rotation vectorielle d'un espace euclidien) *Soit P le plan euclidien orienté, $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de P et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation vectorielle d'angle θ, noté r_θ l'endomorphisme défini par :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = R_\theta.$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie (donc θ est bien défini de façon unique modulo 2π).

Théorème 3.2.1 (Classification des isométries du plan) *Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est soit une réflexion (si son déterminant vaut -1 dans une base orthonormée directe), soit une rotation (si son déterminant vaut 1 dans une base orthonormée directe).*

3.3 Réduction des isométries vectorielles en base orthonormé

3.3.1 Cas général

Théorème 3.3.1 (Réduction d'une isométrie vectorielle ou d'une matrice orthogonale) *1. Si $u \in O(E)$ alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux de la forme*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p+q+2s = n$ et pour tout i de $[\![1, s]\!]$, l'angle θ_i choisi dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Autrement dit, l'espace E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans sur lesquels u opère comme une rotation.

2. Pour toute matrice M de $O_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice P dans $O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p+q+2s = n$ et pour tout i de $[\![1, s]\!]$, l'angle θ_i choisi dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Remarque 3.3.1 *Le spectre réel de u ou M est inclus dans $\{-1, 1\}$.*

3.3.2 Cas des isométries vectorielles directes en dimension 3

Dans ce paragraphe, on suppose que $\dim(E) = 3$.

Proposition 3.3.1 (Réduction des isométries directes en dimension 3 et rotations) *Soit $u \in SO(E)$. Il existe alors une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on dit que u est la rotation d'axe orienté par i et d'angle θ.

Exemple 3.3.1 $\exp(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = SO_3(\mathbb{R})$.

4 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

4.1 Endomorphismes autoadjoints

Dans tout ce paragraphe, $(E, (\cdot|\cdot))$ désignera un espace euclidien de dimension n.

Définition 4.1.1 (Endomorphismes autoadjoints) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint lorsque $u = u^*$, soit :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

Proposition 4.1.1 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux) *Soit p un projecteur. Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est autoadjoint.*

Exemple 4.1.1 *Soit* $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. *Montrer que l'endomorphisme p canoniquement associé à A est une projection orthogonale sur un espace que l'on précisera.*

Proposition 4.1.2 (Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base <u>orthonormée</u> de E. u est autoadjoint si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.*

Proposition 4.1.3 (Sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint) *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E stable de u. Alors on a : $u(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.*

4.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Proposition 4.2.1 (Orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomoprhisme autoadjoint) *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Théorème 4.2.1 (Théorème spectral)
1. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Si u est autoadjoint, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.*
2. *Pour toute matrice symétrique <u>réelle</u> A, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que : $A = PDP^{-1} = PDP^T$.*

Exemple 4.2.1 *On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :*
$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ.$
L'endormorphisme $d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est autoadjoint et donc diagonalisable dans une base orthonormée.

4.3 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques positifs, définis positifs

Définition 4.3.1 (Matrices ou endomorphismes positifs)
1. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si*
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T AX \geq 0 (\textit{respectivement : } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T AX > 0).$$
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.
2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On dit que u est autoadjoint positif (respectivement autoadjoint défini positif) si*
$$\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0 (\textit{respectivement : } \forall x \in E \setminus \{0\},\ (u(x)|x) > 0).$$
On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadoints positifs et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadoints définis positifs.

Exemple 4.3.1 *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$.*

Proposition 4.3.1 (Caractérisation spectrale de la positivité)
1. ***(CCP 66 pour la démonstration)*** *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si : $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).*
2. *Soit $u \in S(E)$. Alors u est dans $S^+(E)$ (respectivement dans $S^{++}(E)$) si et seulement si : $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$).*

Exemple 4.3.2 *Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.*