1 Dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Définition 1.0.1 (Dérivée en un point) *Soit $f : I \longrightarrow F$ une application et soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si :* $\lim_{t \to t_0} \left(\dfrac{1}{t-t_0} (f(t) - f(t_0)) \right)$ *existe.*
Dans ce cas, cette limite est appellée la dérivée de f en t_0 (ou le vecteur dérivé de f en t_0), et on la note $f'(t_0)$.

Proposition 1.0.1 (Dérivable implique continue) *Soient $a \in I$ et une fonction $f : I \to F$ dérivable en t_0. Alors f est continue en t_0.*

Proposition 1.0.2 (Dérivation d'une composée) *Soient I et J deux intervalles réels, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $t_0 \in J$ (resp. sur J) telle que : $\varphi(J) \subset I$. Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable en $u_0 = \varphi(t_0)$ (resp. sur I). Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 (resp. sur J) et*

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0)) \text{ (resp. } (f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)).$$

Définition 1.0.2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$) *Soit $f : I \to F$ une fonction. Soit $k \in \mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f est définie par*

$$f^{(0)} = f, \; f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ si $f^{(k)}$ existe et est continue. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si ses dérivées à tout ordre existent, ce qui est équivalent à être de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

Proposition 1.0.3 (Dérivation coordonnée par coordonnée) *Soient $f \in \mathcal{F}(I, F)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de F. On a donc $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, avec $(f_1, \cdots, f_n)$ les applications coordonnées de f. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

(ii) Toutes les applications coordonnées f_i de f dans la base $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

Dans ce cas, on a :

$$\forall l \in [\![0, k]\!], \forall t \in I, \; f^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(l)}(t) e_i.$$

Exemple 1.0.1 *Déterminer la dérivée n-ème de $f : t \mapsto e^t \cos(t)$.*

Proposition 1.0.4 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$) *Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), définies sur I à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie, λ un réel, L une application linéaire et B une application bilinéaire. Alors, $\lambda f + g$, $L \circ f$ et $B(f, g)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et pour $l \leq k$:*

1. $(\lambda f + g)^{(l)} = \lambda f^{(l)} + g^{(l)}$.
2. $(L \circ f)^{(l)} = L \circ (f^{(l)})$.
3. $B(f, g)^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} B(f^{(j)}, g^{(l-j)})$ *(formule de Leibniz).*

Remarque 1.0.1 *Pour une application multilinéaire M, on a :* $M(f_1, ..., f_p)' = \sum_{i=1}^{p} M(f_1, ..., f_i', ..., f_p)$.

Proposition 1.0.5 (Dérivation de l'exponentielle) *1. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. L'application $e_a : t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}(\exp(ta)) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $e_A : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

2 Généralités sur les équations différentielles linéaires d'ordre un

Ici I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1 Équations différentielles d'ordre un dans un espace vectoriel

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère :

- une application a continue de I dans $\mathcal{L}(E)$: $a : \left\{\begin{array}{lcl} I & \to & \mathcal{L}(E) \\ t & \mapsto & a(t) \end{array}\right.$;
- une application x dérivable de I dans E : $x : \left\{\begin{array}{lcl} I & \to & E \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}\right.$;
- une application b continue de I dans E : $b : \left\{\begin{array}{lcl} I & \to & E \\ t & \mapsto & b(t) \end{array}\right.$.

On désigne par $a.x$ l'application de I dans E : $a.x : \left\{\begin{array}{lcl} I & \to & E \\ t & \mapsto & a(t)(x(t)) \end{array}\right.$.

Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continue également.

Définition 2.1.1 (Équation différentielle linéaire d'ordre un)

- *L'équation $(\mathcal{E})$: $x' = a.x + b$ est appelée équation linéaire du premier ordre .*
  Une solution de cette équation est une application x dérivable de I dans E, telle que :

$$\forall t \in I \quad x'(t) = a(t)\,(x(t)) + b(t).$$

- *L'application b est appelé second membre de $(\mathcal{E})$.*
- *On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à $(\mathcal{E})$ l'équation :*

$$(\mathcal{E}_0) : \quad x' = a.x \ .$$

Définition 2.1.2 (Système différentiel d'ordre un) *1. On appelle système différentiel d'ordre un de taille n toute équation de la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.*
Avec les notations usuelles pour les coordonnées, l'équation s'écrit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & a_{1,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{2,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2,n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ & \vdots & \\ x_n'(t) & = & a_{n,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{array}\right. .$$

2. Si B est nulle, le système $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est dit homogène.

3. Le système linéaire homogène associé à $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ est $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

2.2 Problème de Cauchy et structure de l'espace des solutions

2.2.1 Problème de Cauchy

Définition 2.2.1 (Problème de Cauchy) *Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. On appelle problème de Cauchy la donnée :* $\left\{\begin{array}{l} \forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \ \ (*) \end{array}\right.$.

Pour un système linéaire, cela se traduit par : $\left\{\begin{array}{l} \forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \ \ (*) \end{array}\right.$.

Remarque 2.2.1 *Les relation* $(*)$ *s'appellent conditions initiales à l'instant* t_0.

Théorème 2.2.1 (Cauchy-Lipschitz) *Soit* $t_0 \in I$.
Soit $x_0 \in E$ *Il existe une unique solution sur* I *de l'équation différentielle* $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ *vérifiant la condition* $x(t_0) = x_0$.

Pour un système, soit $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *il existe une unique solution sur* I *de l'équation différentielle* $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ *vérifiant la condition* $Y(t_0) = Y_0$.

Exemple 2.2.1 *Soient* x_1 *et* x_2 *deux solutions distinctes de* $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$. *Montrer que :* $\forall t \in I,\ x_1(t) \neq x_2(t)$.

2.2.2 Structure de l'espace des solutions

On note $n = \dim(E)$.

Proposition 2.2.1 (Structure des solutions d'une équation homogène) *L'ensemble* $\mathcal{S}_H$ *des solutions de l'équation différentielle homogène* $x' = a.x$ *est un espace vectoriel de dimension* n.
Précisément pour tout $t_0 \in I$, *l'application* $\phi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{S}_H & \to & E \\ x & \mapsto & x(t_0) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}_H$ *sur* E.

Pour les systèmes différentiels, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ *des solutions du système différentiel homogène* $X' = AX$ *est un espace vectoriel de dimension* n *et* $\phi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{S}_H & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ Y & \mapsto & Y(t_0) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}_H$ *sur* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Corollaire 2.2.1 (Ensemble des solutions de $x' = a.x + b$) *Soit* x_p *une solution particulière de l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : x' = a.x + b$.
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x' = a.x + b$ *est* $x_p + \mathcal{S}_H = \{x_p + x,\ x \in \mathcal{S}_H\}$, *avec* $\mathcal{S}_H$ *l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée* $(\mathcal{E}_H) : x' = a.x$.
C'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ *de direction* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

Pour les systèmes différentiels, soit Y_p *une solution particulière de l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$.
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ *est* $\{Y_p + Y,\ Y \in \mathcal{S}_H\}$, *avec* $\mathcal{S}_H$ *l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée* $(\mathcal{E}_H) : Y'(t) = A(t)Y(t)$.

2.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Dans ce paragraphe a est un endomorphisme de E et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
qui ne dépendent pas de t.

2.3.1 Résolution des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Proposition 2.3.1 (Solutions de l'équation homogène) *Soit* $t_0 \in \mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in E$. *L'application* $\psi : t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$ *est l'unique solution du problème de Cauchy :*
$\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & a.x \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$.
Pour les systèmes différentiels, soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. *L'application* $\psi : t \mapsto \exp((t-t_0)A)X_0$ *est l'unique solution du problème de Cauchy :* $\left\{ \begin{array}{lll} X' & = & AX \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$.

2.3.2 Résolution de $X' = AX$ quand A est diagonalisable

Proposition 2.3.2 ($X' = AX$, avec A diagonalisable) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *diagonalisable, de valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *(répétées suivant leurs mutliplicités), et soient* $U_1, \ldots, U_n$ *des vecteurs propres associés.*
Alors une base de solutions de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$ *est*

$$(X_i : t \longmapsto e^{\lambda_i t} U_i)_{1\leq i\leq n}.$$

Ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Autrement dit l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(X_1, ..., X_n) = \left\{ t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} U_i, C_1, ..., C_n \in \mathbb{K} \right\}$.

Exemple 2.3.1 *Résoudre* $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2z \\ y' & = & y \\ z' & = & 2x + z \end{array} \right.$.

Remarque 2.3.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$. L'équation $X'(t) = AX(t)+B(t)$ s'écrit quant à elle*
$Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t)$, avec $Z = P^{-1}X$. On peut chercher une solution particulière Z_p de cette dernière équation puis calculer $X_p = PZ_p$.

2.4 Équations différentielles linéaires du premier ordre scalaires

Aprè normalisation, on résout $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, avec a et b des fonctions continues définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.4.1 (Solutions homogènes d'une équation du premier ordre) *Les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont les fonctions définies sur I de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, où A est une primitive de a.*

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, $t \in I$. Pour cela, on utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une solution de la forme $t \mapsto \lambda(t)y_H(t)$, où y_H est une solution non nulle de l'équation homogène.

On a : $\lambda' = b/y_H$.

Exemple 2.4.1 *Résoudre sur les intervalles appropriés : $x(1-x)y' - y = x$.*
Chercher les solutions définies sur $]0, +\infty[$.

3 Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre n

3.1 Définition et lien avec les systèmes différentiels

Dans ce paragraphe, $a_{n-1}, ..., a_0$ et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 (Équation différentielles linéaires)

1. *Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n est une équation différentielle qui s'écrit sous la forme :*

$$(\mathcal{E}) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = b(t).$$

2. *La fonction b est appellée second membre de l'équation différentielle. Lorsque b est nulle, on dit que l'équation différentielle est homogène ou sans second membre .*
3. *Pour une équation différentielle $(\mathcal{E}) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = b(t)$, l'équation différentielle homogène associée est*
   $(\mathcal{E}_h) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = 0$.

Définition 3.1.2 (Problème de Cauchy) *Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.*
On appelle problème de Cauchy le recherche de solutions y de $(\mathcal{E})$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = b(t) \\ (y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0)) = (y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \end{array} \right. .$$

3.1.2 Lien équation différentielles scalaire linéaire d'ordre n et les systèmes différentiels

Proposition 3.1.1 (Équation différentielle scalaire d'ordre n et système différentielle) *L'application* $\varphi : y \longmapsto Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ *induit une bijection de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b$ *sur l'ensemble des solutions de l'équation* $(S) : Y' = AY + B$*, où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Espace des solutions

Corollaire 3.1.1 (Cauchy-Lipschitz et conséquences)

1. *Soient* $t_0 \in I$ *et* $(y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$. *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = b(t) \\ (y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0)) = (y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \end{cases}$$

   admet une unique solution.
2. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$ *est un espace vectoriel de dimension* n.
3. *Si on note* $\mathcal{S}_0$ *l'ensemble des solutions de* $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$*, alors l'application* $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0))$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}_0$ *dans* $\mathbb{K}^n$.

Proposition 3.1.2 (Ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$) *On note* $(\mathcal{E}_H)$ *l'équation homogène* $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) = 0$ *associée à* $(\mathcal{E})$ *et* $\mathcal{S}_H$ *l'ensemble des solutions homogènes. L'ensemble des solutions de* $(\mathcal{E})$ *s'écrit sous la forme* $\{y_p + z, z \in \mathcal{S}_H\}$*, avec* y_p *une solution particulière de* $(\mathcal{E})$.

Exemple 3.1.1

1. *Soient* $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. *On pose* $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   Résoudre $(\mathcal{E}) : y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$.
2. *Soit* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *paire. On considère :* $y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0 \quad (\mathcal{E})$. *Montrer que toute solution* y *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* y *est paire si et seulement* $y'(0) = 0$.

3.2 Cas des équation scalaire d'ordre 2

3.2.1 Wronskien

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ et $(\mathcal{E}_H)$ l'équation homogène $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ associée.

Définition 3.2.1 (Wronskien) *Soient* y_1 *et* y_2 *deux solutions de* $(\mathcal{E}_H)$. *On appelle wronskien de la famille* (y_1, y_2) *l'application définie sur* I *par*

$$w : t \mapsto \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Proposition 3.2.1 (Wronskien et base de solutions homogènes) *Soient y_1 et y_2 deux solutions de $(\mathcal{E}_H)$ et w leur wronkien. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (y_1, y_2) *est une base de solution de* $\mathcal{S}_H$.
2. $\forall t \in I,\ w(t) \neq 0$.
3. $\exists t \in I,\ w(t) \neq 0$.

Remarque 3.2.1 $w' + a(t)w = 0$.

Exemple 3.2.1 *Soit* $(\mathcal{E}) : x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ *sur* $]0,1[$. *Chercher les solutions DSE, puis résoudre* $(\mathcal{E})$ *à l'aide du wronskien.*

3.2.2 Méthode de la variation des constantes

Nous allons adapter dans ce paragraphe la méthode de la variation des constantes à une équation $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. On note $(\mathcal{E}_H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ l'équation homogène associée. Soit (y_1, y_2) une base de solution de $(\mathcal{E}_H)$.
Nous allons maintenant donner une méthode pour trouver une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

Proposition 3.2.2 (Variation des constantes) *Soit (y_1, y_2) une base de solutions de $(\mathcal{E}_H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Soit $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, avec λ_1 et λ_2 dérivables sur I. Alors y est solution de $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1'(t)y_1(t) + \lambda_2'(t)y_2(t) & = & 0 \\ \lambda_1'(t)y_1'(t) + \lambda_2'(t)y_2'(t) & = & c(t) \end{array}\right.$$

Exemple 3.2.2 *Résoudre l'équation différentielle* $y'' + y = \cos^3(x)$.

3.2.3 Révision de sup : équation du second ordre à coefficients constants

Soient a, b, c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ et d une fonction continue définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On recherche les solutions de l'équation différentielle

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t),\ t \in I.$$

a) L'équation homogène

On considère dans un premier temps l'équation homogène

$$(\mathcal{E}) : ay'' + by' + cy = 0.$$

Proposition 3.2.3 (Le cas complexe) *L'ensemble des fonctions complexes solutions homogènes est*

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t),\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2),$$

- *Si* $ar^2 + br + c = 0$ *a deux solutions distinctes* r_1 *et* r_2, $y_1(t) = e^{r_1 t}$, $y_2(t) = e^{r_2 t}$.
- *Si* $ar^2 + br + c = 0$ *a une unique solution réelle* r, $y_1(t) = e^{rt}$, $y_2(t) = te^{rt}$.

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ *est appelée* ***équation caractéristique*** *associée à l'équation.*

Proposition 3.2.4 (Le cas réel) *On suppose maintenant a, b et c réels. L'ensemble des fonctions réelles solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ est*

$$(\mathcal{S}_H)_{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t),\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2),$$

- *Si* $ar^2 + br + c = 0$ *a deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2, $y_1(t) = e^{r_1 t}$, $y_2(t) = e^{r_2 t}$.
- *Si* $ar^2 + br + c = 0$ *a une unique solution réelle* r, $y_1(t) = e^{rt}$, $y_2(t) = te^{rt}$.
- *Si* $ar^2 + br + c = 0$ *a deux solutions complexes distinctes conjuguées* $\alpha + i\beta$ *et* $\alpha - i\beta$, $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

b) Une solution particulière

On note (Eq) l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Pour identifier une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = de^{\alpha t}$, avec α et d des constantse dans $\mathbb{C}$. On pourra s'aider des formes suivantes.

…sur (Eq)…	…chercher la solution particulière sous la forme
α non racine	$t \mapsto ae^{\alpha t}$, $a \in \mathbb{R}$
α racine simple	$t \mapsto ate^{\alpha t}$, $a \in \mathbb{R}$
α racine double	$t \mapsto at^2e^{\alpha t}, a \in \mathbb{R}$

Exemple 3.2.3 *Résoudre :* $(\mathcal{E}) : y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x + 3e^x$