Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application.

1 Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

1.1 Dérivées selon un vecteur

Définition 1.1.1 (Dérivée selon un vecteur) *Soient $a \in U$ et $v \in E$.*

- *On dit que f admet une dérivée selon le vecteur v au point a lorsque la fonction $\varphi_v : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & F \\ t & \mapsto & f(a+tv) \end{array} \right.$ est dérivable en 0 (avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0).*
- *Le vecteur dérivé correspondant est appelé la dérivée de f suivant le vecteur v, et noté $D_v f(a)$:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \varphi_v'(0) = D_v f(a).$$

1.2 Dérivées partielles pour $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}$

Dans ce paragraphe, U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : (x_1, ..., x_p) \to f(x_1, ..., x_p)$ est une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 (Application partielle) *Pour tout $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ et $i \in [\![1, p]\!]$, l'application partielle en a selon la i-ème composante est définie par $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$.*

Définition 1.2.2 (Dérivées partielles en un point) *La fonction f admet une dérivée partielle en a par rapport à la i-ème variable si l'application partielle $f_{a,i}$ admet une dérivée en a_i. Cette valeur est notée $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.*
Autrement dit $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{d}{dt}[f(a_1, ..., t, ..., a_p)]\Big|_{t=a_i} = \lim\limits_{t\to a_i} \dfrac{f(a_1, ..., t, ..., a_p) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_p)}{t-a_i}$.

1.3 Dérivées partielles dans le cas général

On peut étendre notre définition de dérivées partielles à une fonction
$f : (x_1, ..., x_p) \mapsto (f_1(x_1, ..., x_p), f_2(x_1, ..., x_p), ..., f_n(x_1, ..., x_p))$ définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout a de U, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), ..., \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)\right)$, lorsque toutes les fonctions f_i admettent des dérivées partielles selon la i-ème variable en a.

Nous allons même étendre cette définition à $f : U \to F$, avec U un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie E et F également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
On se fixe $(e_1, ..., e_p)$ une base de E.

Définition 1.3.1 (Dérivées partielles) *Soient $a \in U$ et $j \in [\![1, p]\!]$. On dit que f admet une dérivée partielle en a selon la j-ème coordonnée, lorsque $D_{e_j} f(a)$ existe (la dérivée en a selon le vecteur e_j)*
La j-ième dérivée partielle est notée $\partial_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

$$\partial_j f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

2 Différentielle

2.1 Différentiabilité et exemples

Définition 2.1.1 (Différentiablité) *1. On dit que f est différentiable en un point a de U lorsqu'il existe une application linéaire $L_a \in (E, F)$ telle que pour tout h tel que $a+h \in U$:*

$$f(a+h) \;=\; f(a) + L_a(h) + \|h\|\varepsilon(h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|).$$

où $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

2. L'application linéaire L_a, qui est unique, est appelée différentielle de f en a (ou application linéaire tangente à f en a) et notée $df(a)$, c'est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.
Pour tout h tel que $a+h \in U$, on a donc : $f(a+h) \;=\; f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|)$.

3. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Exemple 2.1.1 *Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E et $u \in E$. Soit g définie sur E par $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$. Aloes g est différentiable sur E et :*
$\forall h \in E,\ dg(a).h = (f(a)|h) - (u|h)$.

Proposition 2.1.1 (Différentiabilité et coordonnée) *Soient $F_1, ..., F_p$ des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $f = (f_1, ..., f_r) : E \to F_1 \times ... \times F_r$ une application. f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si pour tout i de $[\![1, r]\!]$, les applications f_i sont différentiable en a.*

Proposition 2.1.2 (Différentiable implique continue) *Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a. Alors f est continue en a.*

Proposition 2.1.3 (Différentielle d'une application linéaire) *Soit $g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors g est différentiable sur U et : $\forall a \in U,\ dg(a) = g$.*

Proposition 2.1.4 (Différentielle des fonctions d'une seule variable) *Soit $f : I \to F$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.*
Alors : f est différentiable en a si et seulement si elle est dérivable en a. Dans ce cas $df(a) : t \mapsto t \times f'(a)$ et en particulier $df(a)(1) = f'(a)$.

2.2 Différentiabilité et dérivées partielles

Proposition 2.2.1 (Différentiable implique existence de dérivées selon tout vecteur) *Si f est différentiable en a, alors pour tout vecteur v de E la fonction f admet une dérivée en a selon v et :*

$$D_v f(a) \;= df(a)(v).$$

Corollaire 2.2.1 (Différentiable implique existence de dérivées partielles) *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.*
On suppose que f est différentiable en $a \in U$. Alors pour tout j de $[\![1, p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a)$ existe et :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a) = df(a)(e_j).$$

Corollaire 2.2.2 (Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles) *1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.*
On suppose que f est différentiable en $a \in U$. Alors pour tout $h = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$df(a).h = \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{x_j}(a).$$

2. On se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^p$. On suppose f différentiable en $a \in U$, alors :

$$\forall (h_1, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p,\ df(a).(h_1, ..., h_p) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{x_j}(a).$$

Définition 2.2.1 (Matrice jacobienne) *Soit $a \in U$ et on suppose f différentiable en a. On appelle matrice jacobienne de f en un point a de U, relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice de la différentielle de f en a dans ces bases :* $J_f(a) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$.

2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.3.1 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, lorsque f est différentiable sur U et l'application* $df : \left\{ \begin{array}{lcl} U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df(a) \end{array} \right.$ *est continue.*

On note $\mathcal{C}^1(U,F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ allant de U dans F.

Théorème 2.3.1 (Caractérisation des applications $\mathcal{C}^1$ par les dérivées partielles) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*
2. *Toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues.*
   Autrement dit si on se fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E, alors les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont définies et continues sur U pour tout j de $[\![1,p]\!]$.

Remarque 2.3.1 *Si f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors elle y est différentiable.*

Exemple 2.3.1 *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$ *Montrer que f est continue, puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*

3 Opérations sur les fonctions différentiables et de classe $\mathcal{C}^1$

3.1 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

3.1.1 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

a) Opérations de base

Ici on considère $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}$. Soit U un ouvert de E.

Proposition 3.1.1 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) *Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*

1. *$f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :* $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \partial_i(f+g) = \partial_i f + \partial_i g$.
2. *Pour tout λ dans $\mathbb{R}$, λf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :* $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \partial_i(\lambda f) = \lambda \partial_i f$.
3. *fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :* $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$.

4. *Si g ne s'annule pas sur U, f/g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :* $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \partial_i \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{(\partial_i f)g - f(\partial_i g)}{g^2}$.
5. *Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que : $f(U) \subset I$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :* $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \partial_i(\varphi \circ f) = \partial_i(f) \times \varphi' \circ f$.

b) Règle de la chaîne et composition

Proposition 3.1.2 (Règle de la chaîne) *Soit $x_1, \ldots, x_p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in I,\ (x_1(t), \ldots, x_p(t)) \in U$, et on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*
Alors $g : t \longmapsto f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i'(t)\partial_i f(x_1(t), \ldots, x_p(t)) = \sum_{i=1}^{p} x_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_p(t)).$$

Exemple 3.1.1 *Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite α-homogène ($\alpha \in \mathbb{R}$) si :*
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y) \quad (*)$.

1. *Montrer l'identité d'Euler :* $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$.
2. *Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant l'identité d'Euler et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
   On définit la fonction $\phi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par : $\forall t > 0 : \phi(t) = f(tx,ty)$.
   Trouver une relation entre ϕ et ϕ' et en déduire que f est α-homogène.

Corollaire 3.1.1 (Règle de la chaîne pour la composition) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soient $i \in [\![1,p]\!]$ et $x_i : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et on pose $g : (u_1, \ldots, u_m) \to f(x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_m))$. Alors la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et :*

$$\forall j \in [\![1,m]\!],\ \frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u, \ldots, u_m)\partial_i f(x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_m)) =$$
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u, \ldots, u_m)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_m)).$$

c) Changement de variable pour les équations aux dérivées partielles

Voici les deux changements de variable à connaître :

- Le changement de variable linéaire : $x(u,v) = au + bv$ et $y(u,v) = cu + dv$.
  Dans ce cas on pose $g : (u,v) \mapsto f(au+bv, cu+dv)$. Nous avons :
  $$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = a\frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{au+bv}_{x}, \underbrace{cu+dv}_{y}) + c\frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{au+bv}_{x}, \underbrace{cu+dv}_{y}).$$
  $$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = b\frac{\partial f}{\partial x}(au+bv, cu+dv) + d\frac{\partial f}{\partial y}(au+bv, cu+dv).$$
- Le changement de variable en coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

  Dans ce cas on pose $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Nous avons :
  $$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$
  $$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$
  Exemple 3.1.2 *Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ solutions de* $(E)\ \ y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = y/x$.

Exemple 3.1.3 *Voici un autre exemple de changement de variable : chercher les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ telles que :* $(E)\ \ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x}$ *(on posera $u = x$, $v = y/x$).*

3.1.2 Cas général

Dans ce paragraphe, E et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie et U est un ouvert de E. Nous généralisons les opérations du paragraphe précédent. On se fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E.

Proposition 3.1.3 (Opérations linéaires sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) *Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*

1. *$f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \partial_i(f + g) = \partial_i f + \partial_i g$.*
2. *Pour tout λ dans $\mathbb{R}$, λf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et : $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \partial_i(\lambda f) = \lambda \partial_i f$.*

Proposition 3.1.4 (Composition) *Soit V un ouvert de F et G un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de F et $\mathcal{B}'' = (e''_1, ..., e''_m)$ une base de G.*
Soient $f : U \to V$ et $g : V \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$. $\forall a \in U,\ J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$.

3.2 Opérations sur les différentielles

3.2.1 Combinaison linéaire

Proposition 3.2.1 (Combinaison linéaire d'applications différentiables) *L'ensemble des applications de U dans F, différentiables sur U, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et pour toute fonction $f : U \to F$ et $g : U \to F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur U et :*

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg.$$

Corollaire 3.2.1 (Combinaison linéaire d'applications différentiables et dérivées partielles) *La proposition 3.1.3 reste vraie pour des applications différentiables.*

3.2.2 Composition avec une application bilinéaire

Proposition 3.2.2 (Composition d'applications différentiables avec une application bilinéaire) *Soient F_1 et F_2 deux espaces vectoriels normés de dimension finie et $B : F_1 \times F_2 \to G$ une application bilinéaire à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie G, et f, g deux applications définies et différentiables sur U, à valeurs respectivement dans dans F_1 et F_2.*
Alors $B(f, g)$ est différentiable sur U et pour $a \in U$, on a :

$$d(B(f,g))(a) = B(f(a), dg(a)) + B(df(a), g(a)), \text{ soit : } \forall h \in E,\ d_a(B(f,g))(h) = B(f(a), dg(a).h) + B(df(a).h, g(a)).$$

Remarque 3.2.1 *Si M est multilinéaire : $\forall h \in E,\ d(M(f_1, ..., f_r))(a).h = \sum_{i=1}^{r} M(f_1(a), ..., df_i(a).h, ..., f_r(a))$.*

3.2.3 Composition

Proposition 3.2.3 (Composition d'applications différentiables) *Soient V un ouvert de F, G un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : U \to F$ et $g : V \to G$ différentiables telles que : $f(U) \subset V$.*
L'application $g \circ f$ est différentiable sur U et :

$$\forall a \in U,\ d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a), \text{ soit : } \forall a \in U, \forall h \in E,\ d(g \circ f)(a).h = dg(f(a))(df(a).h).$$

Exemple 3.2.1 *Soient U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur E ne s'annulant jamais. Montrer que $1/f$ est différentiable sur U et déterminer $d(1/f)$.*

3.3 Dérivée le long d'un arc et applications

Proposition 3.3.1 (Dérivée le long d'un arc) *Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to U$ et $f : U \to F$. Si γ est dérivable en t_0 et si f est différentiable en $a = \gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma : I \to F$ est dérivable en t_0 et*

$$(f\circ\gamma)'(t_0)df(\gamma(t_0))\Big(\gamma'(t_0)\Big) = df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0).$$

En particulier si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$\int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt = f(b) - f(a).$$

Théorème 3.3.1 (Caractérisation des fonctions constantes par la différentielle) *Soit U un ouvert connexe par arcs de E et $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est constante sur U si et seulement si $df = 0$.*

Exemple 3.3.1 *Soit $f : (x, y) \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.*

1. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine D que l'on précisera et que l'on représentera graphiquement.*
2. *Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur D, puis simplifier l'expression de f.*

4 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

4.1 Définitions et opérations

Définition 4.1.1 (Dérivées partielles successives) *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $j_1, ..., j_k \in [\![1, p]\!]$*

1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, une application $f : \left\{\begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, ..., x_p) \end{array}\right.$. On dit que f admet une dérivée k-ème successivement selon les variables $x_{j_1}, ..., x_{j_k}$, lorsque $\dfrac{\partial}{\partial x_{j_k}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}}\left(...\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)...\right)\right)$ existe sur U.*
   Dans ce cas, la fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_{j_k}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}}\left(...\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)...\right)\right)$ est noté $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\partial x_{j_{k-1}}...\partial x_{j_1}}$.
   Une telle fonction s'appelle dérivée partielle d'ordre k.
2. *Soient U un ouvert de E, une application $f : U \to F$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. On dit que f admet une dérivée k-ème successivement selon les variables $x_{j_1}, ..., x_{j_k}$, lorsque la fonction $\partial_{j_k}(\partial j_{k-1}(...(\partial_{j_1} f)...))$ existe sur U.*
   Dans ce cas, la fonction $\partial_{j_k}\left(\partial_{j_{k-1}}(...(\partial_{j_1} f)...)\right)$ est noté $\partial_{j_k}\partial_{j_{k-1}}...\partial_{j_1} f$.
   Une telle fonction s'appelle dérivée partielle d'ordre k.

Définition 4.1.2 (Applications $\mathcal{C}^k$)
1. *Une application $f : U \to F$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.*
2. *On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans F. C'est une $\mathbb{K}$-algèbre.*
3. *Une application est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U si elle est dans $\mathcal{C}^k(U, F)$ pour tout k de $\mathbb{N}$.*
4. *On note $\mathcal{C}^\infty(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de U dans F.*

Exemple 4.1.1
1. *Équation de d'Alembert sur la propagation d'une onde :* *déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, avec $c > 0$. On posera le changement de variable $u = x - ct$ et $v = x + ct$.*
2. *Laplacien :* *soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose le laplacien de f qui est $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.*

(a) *Rechercher les fonctions* $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ *telles que* $f : (x, y) \mapsto h(x^2 + y^2)$ *vérifie* $\Delta f = 0$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) *On pose* $g(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. *Exprimer le laplacien de* f *en coordonnées polaires (c'est-à-dire à l'aide de* g*).*

4.2 Les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Théorème 4.2.1 (Théorème de Schwarz) *On suppose* $f : U \to F$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *et* $i, j \in [\![1, p]\!]$. *Alors :*

$$\forall a \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Exemple 4.2.1 *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right. \end{array} \right.$ *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. *Montrer que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ *existent. Que peut-on conclure ?*

Définition 4.2.1 (Hessienne) *On appelle matrice hessienne de* f *en* x *dans* U, *la matrice symétrique*

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{1 \le i, j \le n}.$$

Proposition 4.2.1 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2) *On a :*

$$f(x+h) \underset{h \to 0}{=} f(x) + df(x).h + \frac{1}{2} \langle H_f(x)h, h \rangle + o(\|h\|^2) \underset{h \to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x)h, h \rangle + o(\|h\|^2) \underset{h \to 0}{=}$$

$$f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(x) h + o(\|h\|^2),$$

soit

$$f(x+h) = f(x) + df(x).h + \frac{1}{2} \langle H_f(x)h, h \rangle + \|h\|^2 \varepsilon(h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x)h, h \rangle + \|h\|^2 \varepsilon(h) =$$

$$f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(x) h + \|h\|^2 \varepsilon(h),$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

5 Cas des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$

5.1 Gradient

Dans ce paragraphe E est un espace euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ est une application différentiable en a et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormée de E.

Définition 5.1.1 (Gradient) *Il existe un unique vecteur* $v \in E$ *tel que :*

$$\forall h \in E, \; df(a)(h) = (h|v).$$

Le vecteur v *est le gradient de* f *en* a *noté* $\nabla f(a)$. *Ainsi :* $\forall h \in E, \; df(a)(h) = (h|\nabla f(a))$.

Proposition 5.1.1 (Composantes du gradient en base orthonormée) *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base orthonormée de E. Alors :*

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a) e_i.$$

En particulier si $E = \mathbb{R}^p$, on a : $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_p f(a) \end{pmatrix}$.

Exemple 5.1.1 *Déterminer le gradient de $f : x \mapsto \|x\|_2$ en $a \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.*

5.2 Extremums

Définition 5.2.1 (Extremum local / global) *Soient A une partie de E, $f : A \to \mathbb{R}$ une application et $a \in U$.*

1. *f présente un maximum local en a s'il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$ telle que pour tout $x \in \mathcal{B}(a, r) \cap A$, $f(x) \leq f(a)$. Ce maximum vaut $f(a)$.*
2. *f présente un minimum local en a s'il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$ telle que pour tout $x \in \mathcal{B}(a, r) \cap A$, $f(x) \geq f(a)$ Ce minimum vaut $f(a)$.*
3. *f présente un maximum global en a si : $\forall x \in A$, $f(x) \leq f(a)$.*
4. *f présente un minimum global en a si : $\forall x \in A$, $f(x) \geq f(a)$.*
5. *Un extremum est un maximum ou un minimum.*

Définition 5.2.2 (Point critique) *Soient U un ouvert de E, $f : U \to E$ une application différentiable en $a \in U$. On dit que a est un point critique de f si $df(a) = 0$.*
Autrement dit si on se fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E, alors : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, soit $\nabla f(a) = 0$.

Proposition 5.2.1 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum) *Soient U un <u>ouvert</u> de E, $f : U \to E$ une application différentiable en $a \in U$. Si f présente un extremum local en a, <u>alors</u> a est un point critique de f.*

Proposition 5.2.2 (Condition nécessaire d'extremum) *Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U. Si f admet un minimum (resp. maximum) local en $x_0 \in U$, alors x_0 est un point critique de f et $H_f(x_0)$ (resp. $-H_f(x_0)$) est dans $S_n^+(\mathbb{R})$.*

Proposition 5.2.3 (Condition suffisante d'extremum) *Si $x_0 \in U$ est un point critique de f et si $H_f(x_0)$ (resp. $-H_f(x_0)$) est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum (resp. maximum) en x_0 et localement, c'est le seul point en lequel ce minimum (resp. maximum) est atteint.*

Corollaire 5.2.1 (Condition suffisante d'extremum pour $n = 2$) *Soit x_0 un point critique de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}$.*
On note $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0)$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)$. Alors

- *Si $\det(H_f(x_0)) = rt - s^2 > 0$ et $tr(H_f(x_0)) = r + s > 0$, alors f admet un minimum local en a.*
- *Si $\det(H_f(x_0)) = rt - s^2 > 0$ et $tr(H_f(x_0)) = r + s < 0$, alors f admet un maximum local en a.*
- *Si $\det(H_f(x_0)) = rt - s^2 < 0$, alors f ne présente pas d'extremum local en a*

Exemple 5.2.1

1. *Chercher les extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.*
2. *Chercher les extrema globaux de $f : (x, y) \mapsto 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ admet un maximum global sur $C = [0, 1] \times [0, 1]$.*

6 Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

6.1 Vecteurs tangents

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et M est une partie de E.

Définition 6.1.1 (Vecteur tangent à M) *Soient $x \in M$ et $v \in E$. On dit que v est un vecteur tangent à M en x s'il existe un réel strictement positif ε et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ dérivable en 0, telle que : $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.*
On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x.

Proposition 6.1.1 (Espace tangent d'une partie définie implicitement) *Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathcal{C}^1$, avec Ω un ouvert de E. Soit $M = \{x \in \Omega,\ g(x) = 0\}$. Soit $x \in M$. Si $dg(x) \neq 0$, alors $T_xM = \mathrm{Ker}\,(dg(x))$.*
En particulier si E est muni d'une structure euclidienne, alors $T_xM = (\nabla g(x))^{\perp}$.

Exemple 6.1.1 *On considère la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, avec $R > 0$. Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in S$. Déterminer T_uS.*

Corollaire 6.1.1 (Vecteurs tangents à un graphe d'une fonction de deux variables) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $\mathcal{S}$ la surface (de $\mathbb{R}^3$) définie par l'équation : $z = f(x, y)$ qui est le graphe de f.*
Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Alors

$$T_a\mathcal{S} = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3,\ w = u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right\}.$$

Définition 6.1.2 (Plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\mathcal{S}$ la surface définie par l'équation : $f(x, y, z) = 0$ et on considère $a \in \mathcal{S}$.*
Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en a est le sous-espace affine $a + T_a\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$. Ce plan passe donc par a et $T_a\mathcal{S}$ est sa direction.

Corollaire 6.1.2 (Équation des plans tangents au graphe d'une fonction de deux variables) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On pose $\mathcal{S}$ la surface définie par l'équation : $z = f(x, y)$.*
Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Alors l'équation du tangent à $\mathcal{S}$ en a est :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

6.2 Optimisation sous contrainte d'égalité

Proposition 6.2.1 (Extremum sur une partie M) *Soit Ω un ouvert de E. Soit M une partie de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable en un point x de M. Si $f|_M$ admet un extremum local en x, alors : $\forall v \in T_xM,\ df(x)(v) = 0$.*

Théorème 6.2.1 (Optimisation sous contrainte) *Soient Ω un ouvert et f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $M = \{x \in \Omega,\ g(x) = 0\}$. Soit $x \in M$ tel que : $dg(x) \neq 0$.*
Si $f|_M$ admet un extremum local en x, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(x) = \lambda dg(x)$.
En particulier, si E est un espace euclidien, dans ces conditions il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$.

Exemple 6.2.1 *Soient $f : (x, y) \mapsto x + y$ et $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4 + y^4 = 1\}$. Déterminer les extremums de $f|_M$.*