Correction des exercices du 05/02/2024 (Espaces euclidiens spé)

Ex 1 : Soit E le plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $f_m \in \mathcal{L}(E)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f_m) = A_m$. Pour quels m, f_m est-telle une isométrie vectorielle et econnaître la nature de f_m pour $A_m = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} m^2-1 & -m+2+\sqrt{2} \\ 2(m-1-\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix}$ et $B_m = \begin{pmatrix} m-\dfrac{1}{4} & m+\dfrac{1}{2} \\ m+\dfrac{1}{2} & -m+\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Correction : Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors f_m est une isométrie vectorielle si et seulement si A_m est dans $O_2(\mathbb{R})$.

- La deuxième colonne de $A_m = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} m^2-1 & -m+2+\sqrt{2} \\ 2(m-1-\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix}$ doit être de norme 1, soit $\dfrac{1}{5}\left((-m+2+\sqrt{2})^2+1\right) = 1 \Leftrightarrow (-m+2+\sqrt{2})^2 = 4 \Leftrightarrow$
  $(-m+2+\sqrt{2} = 2)$ ou $(-m+2+\sqrt{2} = -2) \Leftrightarrow (m = \sqrt{2})$ ou $(m = 4+\sqrt{2})$.
  -Si $m = 4+\sqrt{2}$. La première colonne de A_m est $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} m^2-1 \\ 2(m-1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 17+8\sqrt{8} \\ 6 \end{pmatrix}$ qui n'est pas de norme 1, donc A_m n'est pas pas de $O_2(\mathbb{R})$ et f_m n'est pas une isométrie vectorielle.
  -Si $m = \sqrt{2}$, alors $A_m = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Comme $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta) < 0$, on peut prendre θ dans $]-\pi/2, 0[$. On a $\tan(\theta) = \dfrac{-2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} = -2$, donc $\theta = -\operatorname{Arctan}(2)$ et $A_m = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
  Ainsi f_m est la rotation vectorielle d'angle $-\operatorname{Arctan}(2)$.
- Pour $B_m = \begin{pmatrix} m-\dfrac{1}{4} & m+\dfrac{1}{2} \\ m+\dfrac{1}{2} & -m+\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$, il est clair que les vecteurs colonnes sont orthogonaux.
  La norme des vecteurs colonnes vaut : $(m-1/4)^2 + (m+1/2)^2 = 2m^2 + m/2 + 5/16$. Ainsi B_m est dans $O_2(\mathbb{R})$ si et seulement si
  $2m^2 + m/2 + 5/16 = 1 \Leftrightarrow 2m^2 + m/2 - 11/16 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-1+\sqrt{23}}{8}$ ou $m = -\dfrac{1+\sqrt{23}}{8}$.
  Dans ces deux cas, comme $(m-1/4)^2 + (m-1/2)^2 = 1$, on constate que $B_m^2 = I_2$. De plus $\det(B_m) = -(m-1/4)^2 - (m-1/2)^2 = -1$, donc f_m correspond à une symétrie orthogonale.
  Il reste à chercher l'axe de cette symétrie. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  On a : $B_m X = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (m-1/4)x + (m+1/2)y & = & x \\ (m+1/2)x - (m-1/4)y & = & y \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}$
  $\left\{\begin{array}{lcl} (m-1/4)x + (m+1/2)y & = & x \\ 2mx - x/4 + 3/4y & = & y + x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (m-1/4)x + (m+1/2)y & = & x \\ y & = & (8m-5)x \end{array}\right. \Leftrightarrow$
  $y = (8m-5)x$
  Ainsi f_m est la symétrie vectorielle d'axe $vect(1, 8m-5)$.

Ex 2 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que : $\dfrac{(\operatorname{tr}(A))^2}{\operatorname{tr}(A^2)} \leq \operatorname{rg}(A)$.

Correction : Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_p \end{pmatrix} P$, avec $\mu_1, ..., \mu_p$ les valeurs propres non nulles (on a $p \geq 1$, sinon $A = 0$).

Comme la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang, alors $\mathrm{rg}\,(A) = p$.

Par ailleurs, on a : $A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \mu_1^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_p^2 \end{pmatrix} P$.

On a donc $\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i$ et $\mathrm{tr}\,(A^2) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i^2$.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\mathrm{tr}\,(A))^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} 1 \times \mu_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{p} 1^2 \right) . \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i^2 \right) = p.\mathrm{tr}\,(A^2)$.

Comme $\mathrm{tr}\,(A^2) > 0$, car $p \geq 1$, alors on a : $\dfrac{(\mathrm{tr}\,(A))^2}{\mathrm{tr}\,(A^2)} \leq \mathrm{rg}\,(A)$.