Ex 1 : ($x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$) Déterminer les limites (quand elles existent) quand n tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor,\ \sqrt[n]{a^n+b^n},\ \frac{5n^2+\sin n}{3n^2\cos(n\pi/5)},\ \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1},\ e^{-n}\operatorname{ch}\sqrt[4]{n^4+1},\ n^{\frac{1}{n}}-1.$$

Ex 2 : Montrer que toute suite convergente à termes dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Ex 3 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par leurs premiers termes $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et par les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} &= \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{cases}$.

a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et que $v_n \leq u_n$ pour $n \geq 1$.

b. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Que dire de leurs limites ?

Ex 4 : ***1.*** Soit $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$, où $\alpha \in]-\pi;\pi[$. Simplifier u_n et en déduire la limite de (u_n).

2. Soit $z_0 = re^{i\alpha} \in \mathbb{C}^\star$, avec $r > 0$ et $\alpha \in]-\pi,\pi]$.
On définit la suite complexe (z_n) par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{z_n+|z_n|}{2}$.
Calculer z_n en fonction de n et en déduire la limite de (z_n).

Ex 5 : Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|1+\tfrac{z}{n}\right|^n = e^x$.

2. Montrer que pour tout entier n assez grand $1+\frac{z}{n} \neq 0$ et $\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) \equiv \operatorname{Arctan}\frac{y}{n+x}\ [2\pi]$.

3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Ex 6 : Soit (x_n) définie par $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \sqrt{n+x_{n-1}} \quad \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$.

Montrer successivement que $\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant n$, $\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{2n-1}$, $x_n \sim \sqrt{n}$ et pour finir un développement asymptotique à deux termes de (x_n).

Ex 7 : Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x_n\sin(t)}dt$. On pourra montrer que $f : x \mapsto e^{-x}$ est 1-lipschitzienne.

Ex 8 : Montrer que l'équation $x^3+nx = 1$ admet une unique solution pour $n \in \mathbb{N}$. On la note x_n. Déterminer la limite de la suite (x_n) puis un développement asymtpotique à deux termes.

Ex 9 : Étude de la converge de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2+u_n^2}$, $u_0 \geqslant 0$.

Ex 10 : (*) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$. On pourra remarquer que pour tout x de $[-1,1]$, on a : $x = \sin\sqrt{t_k}$, avec $t_k = (2k\pi + \operatorname{Arcsin}(x))^2$, pour k dans $\mathbb{N}$.

Ex 11 : (*) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles bornées telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Montrer que ces deux suites ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Ex 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$. Montrer l'existence de $l \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $x_n = l + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Ex 13 : Déterminer la nature de la série de terme général :

1. $n\exp(-\sqrt{n})$;
2. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$;
3. $x^{\ln n}$ où $x>0$, puis $x^{\lfloor \ln n\rfloor}$;
4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}(\cos^2(n))}$;
5. $\dfrac{4^n - n}{5^n + 2n^4}$;
6. $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$;
7. $\dfrac{1}{n^\alpha + \operatorname{Arctan}(n)}, \alpha \in \mathbb{R}$;
8. $\dfrac{1}{(n^2+\ln^7(n))(\ln(n^4+2n))^5}$;
9. $\dfrac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$;
10. $\dfrac{\ln(n)}{3n^4 - n}$;
11. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;
12. $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;
13. $n\sin(1/n)$;
14. $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;
15. $\left(b+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}, b \geq 0$;
16. $n^{an^b}, a, b \in \mathbb{R}$;
17. $\ln\left(\dfrac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$;
18. $\sin\left(\dfrac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}}\right)$;
19. $\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
20. $\left(1-\dfrac{(\ln n)^\beta}{n}\right)^{n^\alpha}$;
21. $\dfrac{2^n}{n^n}$;
22. $\ln(1+x^{2^n}), x \in \mathbb{R}_+$;
23. $\dfrac{\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2}\rfloor + n}$;
24. $(-1)^n n^2$;
25. $\dfrac{\lfloor \sqrt{n}\rfloor\, e^{\cos(n)}}{n^3 - n}$;
26. $\dfrac{\lambda^n}{1+\lambda^{2n}},\ \lambda \in \mathbb{R}$;
27. $\dfrac{1}{\binom{n+p}{n}^\alpha},\ p \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
28. $\dfrac{(-1)^n}{\binom{n+p}{n}^\alpha},\ p \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
29. $\dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$;
30. $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;
31. (*) $\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$;
32. $\sum \cos\left(n^2\pi\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)$;
33. $(-1)^n\left(e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$;
34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{n^2+\sin^2(x)}$;
35. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}^*$; puis la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$;
36. $\dfrac{a^{2^n}}{\prod_{k=1}^{n}(1+a^{2^k})}, a \in \mathbb{R}_+^*$;
37. $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$;
38. $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$;
39. $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
40. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$;
41. $\dfrac{1}{n^\beta}\left(\dfrac{2\cdot 4 ...(2n)}{3\cdot ...(2n+3)}\right)^\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
42. $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an},\ a \in \mathbb{R}$;
43. $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n^2}{n^2+2}\right)$.

Ex 14 : Soit (u_n) une suite à termes positifs tels que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

Ex 15 : Déterminer la nature puis la somme de la série de terme général :

1. $\dfrac{n^2}{n!}$;
2. $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$;
3. $\sum \ln\left(\dfrac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}\right)$;
4. $\dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, $x \in]-1,1[$;
5. $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$;
6. $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$;
7. $(3+(-1)^n)^{-n}$;
8. $\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$;
9. $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{4^n}$;
10. $\dfrac{n}{(n+1)!}$;
11. $\ln(1+x^{2^n}), x \in \mathbb{R}_+$;
12. $\dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$, $p \in \mathbb{N}$;
13. $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$;
14. $(n+1)3^{-n}$;
15. $\ln\left(1+\dfrac{2}{(n+3)n}\right)$;
16. $\dfrac{1}{4n^2-1}$
17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$;

Ex 16 : (*) Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}$.

Ex 17 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la convergence de (u_n) selon la valeur de u_0.
2. (*) On suppose que $u_0 > 0$.
   a. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^{-n}\ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge vers un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   b. Montrer que $u_n \sim \exp(2^n a)$.
   c. Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{2^{n+1}} u_n$. En déduire que $u_n = \exp(2^n a) - \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Ex 18 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ dérivable, telle que $f(0) = 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq f(x) < 1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Étudier la suite (u_n).
2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Quelle est la nature de $\sum u_n^2$?
3. On suppose toujours que $f'(0) \neq 0$. On pose $x_n = \ln(f(u_n))$, pour $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de (x_n) ? Nature de $\sum x_n$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
4. Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $v_{n+1} = \ln(1+v_n)$. Étudier les suites (u_n) et (v_n).

Ex 19 : Étude de la convergence des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2 - e^{1/k})$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!}$.

Ex 20 : Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$ quand n tend vers $+\infty$.

Ex 21 : Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.

2. Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge puis que : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$.

Ex 22 : (*) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $\sum u_n$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$.

1. On suppose $\alpha \leq 0$. Montrer que $\sum v_n$ converge.

2. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum v_n$ diverge.

3. On suppose $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Ex 23 : (*) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$.

1. Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.

2. Donner un équivalent de a_n. On pourra étudier $S_{n+1}^{\alpha} - S_n^{\alpha}$ pour un α bien choisi.

Ex 24 : Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général a_n est convergente. On pose, pour $n \geq 2$, $b_n = -\dfrac{a_n \ln(a_n)}{\ln(n)}$.

1. Par une étude de $x \mapsto -x\ln(x)$, montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que tout entier k tel que $k \geq k_0$, on a l'implication : $a_k \leq \dfrac{1}{k^3} \Rightarrow b_k \leq \dfrac{3}{k^3}$.

2. Montrer que la série de terme général b_n converge.

3. Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ une suite à valeurs dans $]0, 1[$ et telle que la série $\sum \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{\ln(n)}$ converge.

Ex 25 : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{x^n} \prod\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Étudier la suite $\left(\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge.

3. En déduire un équivalent de u_n.

Ex 26 : *1.* Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le réel $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier.

2. En déduire la nature de la série $\sum \sin\left((2+\sqrt{3})^n\right)$.

Ex 27 : Soient (a_n) et (b_n) deux suites à termes positifs telles que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, avec $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < \beta$.

1. Justifier l'existence d'un entier N tel que : $\forall n \geq N,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

2. En déduire que $a_n = O(b_n)$.

3. En déduire que si $\lambda > 1$, alors $\sum a_n$ converge et si $\lambda < 1$, alors $\sum a_n$ diverge (on pourra choisir $b_n = 1/n^{\beta}$).

Ex 28 : (*) Sous réserve d'existence, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin(1/k)$.

Ex 29 : (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}$. Montrer l'existence de R_n, puis en donner un équivalent simple et enfin un développement asymptotique à deux termes.

Ex 30 : Soit (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(u_n)$. On pose $v_n = 2^n u_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 et que la série $\sum u_n$ converge.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2}\right)$ converge.

3. En déduire qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+^*$ (que l'on ne calculera pas) tel que $u_n \sim \dfrac{l}{2^n}$.

4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Ex 31 : *1.* Trouver un équivalent de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}}\right)$

2. Montrer qu'il existe une constante C telle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}\right) = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ex 32 : Soient $\alpha > 0, u_1 > 0$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^{\alpha}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Jusitifier l'existence de $\ln(S_{n+1})$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et l'exprimer à l'aide de $\ln(S_n)$.

2. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right)$.

3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1/2$.

4. Pour $\alpha \leq 1/2$, déterminer la limite de $(\ln(S_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$; conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.

Ex 33 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Ex 34 : *1.* Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ converge et calculer sa somme S.

2. Proposer un encadrement de S avec ses sommes partielles.

3. Montrer que e est irrationnel.

Ex 35 : En étudiant des paquets de deux termes consécutifs, déterminer la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n \cos(\ln(n))}{n}$.

Ex 36 : *1.* Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (on exprimera les sommes partielles sous forme d'intégrale).

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que la série de terme général R_n converge et déterminer sa somme.

Ex 37 : On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. Montrer que la suite $\left(a_n + (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)$ admet une limite réelle ℓ.

2. Montrer que ℓ est dans $\mathbb{R}_+^*$.

3. Quelle est la nature de $\sum 1/a_n$?

Ex 38 : Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx - f(x) = \int_n^{n+1} (n+1-x)f'(x)dx$.

2. Montrer que la série $\sum \dfrac{\sin(\ln(n))}{n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{x}dx$ sont de même nature.

Ex 39 : Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = o(u_n)$. Montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente et que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim u_n$.

En déduire la nature de la série de terme général $n!\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1\right]$.

Ex 40 : Soit $z = x + iy$, avec x et y réels. On suppose que z n'est pas dans $\mathbb{Z}_-^*$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{n!}{(z+1)(z+2)...(z+n)}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $x > 1$ (on pourra étudier $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right|$ et en déduire un équivalent simple de $|u_n|$).

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ (n+z)u_n + (z-1)S_{n-1} = 1$.

En déduire que la convergence de la série $\sum u_n$ équivaut à son absolue convergence. Lorsque la série converge, quelle est sa somme ?

Ex 41 : ***1.*** Déterminer la limite de la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

2. Donner la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

3. Donner la nature de la série $\sum u_n^2$.

4. Donner la nature de la série $\sum u_n$ à l'aide de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Ex 42 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

a. Montrer l'existence de R_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

c. En déduire un équivalent de R_n.

d. Quelle est la nature de $\sum R_n$.

Ex 43 : (*) Déterminer $\left\lfloor \displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right\rfloor$.

Ex 44 : Pour $a > 0$, étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

Ex 45 : Existence et calcul de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) e^{-at} dt$.

Ex 46 : (*) ***1.*** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = (\ln(2))(\ln(n)) + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1)$.

2. En déduire la somme de la série $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$. (On pourra transformer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ et on rappelle qu'il existe une constante γ telle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$).

3. Donner un équivalent du reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Ex 47 : Donner un équivalent des suites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ex 48 : (*) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$). Même question avec la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Ex 49 : (*) Montrer que : $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ex 50 : ***1.*** Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}dt$.

2. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}dt$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Ex 51 : Établir que : $\displaystyle \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$, avec $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ex 52 : Nature et somme de :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$, $|z| < 1$;

2. $\displaystyle\sum_{p,q\geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p}$;

3. $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$, avec (r,θ) dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$, avec $\displaystyle\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^n}$.

Ex 53 : Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\sigma(n))^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sigma(n)}$?

Ex 54 : (*) Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ deux séries absoluments convergentes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$\displaystyle c_n = \sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}}$ (somme étendue sur tous les diviseurs de n) et $N(n)$ le nombre de diviseurs de n.

On pose $\displaystyle\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ et on note φ l'indicatrice d'Euler.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_n$ converge absolument et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$.

2. Montrer que la série de terme général $N(n)/n^\alpha$ converge pour $\alpha > 1$ et déterminer sa somme.

3. Montrer que pour $\alpha > 2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge et déterminer sa somme.

Ex 55 : Étudier la finitude des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$;

2. $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}\frac{1}{x^2}$;

3. $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{a^p + b^q}$, $a > 1$, $b > 1$.

Ex 56 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\displaystyle S_n = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq}{p+q}$.

En examinant $S_n - S_{n-1}$, montrer que $S_n \sim \dfrac{2}{3}(1-\ln(2))n^3$.
