Correction des exercices du 26/02/2024 (Équations différentielles)

Ex 1 : Résoudre $(e^x-1)y'+e^xy=1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : Sur $\mathbb{R}_-*$ et $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à $y'+\dfrac{e^x}{e^x-1}y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

Équation homogène : $y'+\dfrac{e^x}{e^x-1}y=0$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x-1}$ est $x\mapsto\ln|e^x-1|$.

Les solutions homogènes sont $\left\{x\mapsto\lambda e^{-\ln|e^x-1|},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\mapsto\lambda e^{\ln\left(\frac{1}{|e^x-1|}\right)},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}=$
$\left\{x\mapsto\dfrac{\lambda}{|e^x-1|},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ cet ensemble est $\left\{x\mapsto\dfrac{\lambda}{e^x-1},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$ cet ensemble est $\left\{x\mapsto-\dfrac{\lambda}{e^x-1},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$. Mais $\mu=-\lambda$ décrit $\mathbb{R}$ quand λ décrit $\mathbb{R}$. Ainsi cet ensemble s'écrit aussi $\left\{x\mapsto\dfrac{\mu}{e^x-1},\ \mu\in\mathbb{R}\right\}$.

Dans tous les cas, l'ensemble des solutions homogènes s'écrit : $\left\{x\mapsto\dfrac{\mu}{e^x-1},\ \mu\in\mathbb{R}\right\}$.

Solution particuière : On la cherche sous la forme $x\mapsto\mu(x)\dfrac{1}{e^x-1}$.

On doit avoir $\mu'(x)\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{1}{e^x-1}$, soit $\mu'(x)=1$, ainsi $\mu(x)=x$ convient. Une solution particulière est donc $x\mapsto\dfrac{x}{e^x-1}$.

Ainsi sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des solutions est $\left\{x\mapsto\mu\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{x}{e^x-1},\ \mu\in\mathbb{R}\right\}$.

Étude des solutions sur $\mathbb{R}$: • Analyse : soit y une éventuelle solution sur $\mathbb{R}$. Il existe $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ tels que : $y(x)=\begin{cases}\mu_1\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si}\quad x>0\\ \mu_2\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si}\quad x<0\end{cases}$.

Comme y est dérivable en 0, elle doit être continue aussi en 0. On a $\lim\limits_{x\to0^+}\left|\dfrac{1}{e^x-1}\right|=+\infty$ et $x\mapsto\dfrac{x}{e^x-1}$ a une limite finie en 0. En effet $\dfrac{x}{e^x-1}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x}{x}=1$. Ainsi y a une limite finie à droite et à gauche de 0 si et seulement si $\mu_1=\mu_2=0$. Et dans ce cas $y(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$.

• Examen : on pose $y:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si}\quad x\neq0\\ 1 & \text{si}\quad x=0\end{cases}$.

Cette fonction est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Étudions sa dérivabilité en 0.
Montrons que y admet un $DL_1(0)$.
Quand h tend vers 0, on a : $y(h)=\dfrac{h}{1+h+h^2/2-1+o(h^2)}=\dfrac{h}{h+h^2/2+o(h^2)}=\dfrac{1}{1+h/2+o(h)}=$
$1-h/2+o(h)$. Ainsi y est dérivable en 0 et $y'(0)=-1/2$.
En regardant l'équation de départ : $(e^0-1)y'(0)+e^0y(0)=y(0)=1$.
Ainsi y est bien solution sur $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si}\quad x\neq0\\ 1 & \text{si}\quad x=0\end{cases}\right\}.$$

Ex 2 : Résoudre $y'' + 4y = \tan(t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Correction : Équation homogène : $y'' + 2^2 y = 0$. Les solutions homogènes sont $\{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Solution particulière : On utilise la méthode de la variation des constantes. On cherche une solution de la forme : $x \mapsto \lambda(x)\cos(2x) + \mu(x)\sin(2x)$ et on doit avoir : $\begin{cases} \lambda'(x)\cos(2x) + \mu'(x)\sin(2x) &= 0 \\ -2\lambda'(x)\sin(2x) + 2\mu'(x)\cos(2x) &= \tan(x) \end{cases}$.

Matriciellement : $\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2x)\tan(x) \\ \frac{1}{2}\cos(2x)\tan(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x)\sin(x)\tan(x) \\ \frac{1}{2}(2\cos^2(x) - 1)\tan(x) + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2(x) \\ \sin(x)\cos(x) - \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \end{pmatrix}$$

On a donc $\begin{cases} \lambda'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \\ \mu'(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \end{cases}$, donc $\begin{cases} \lambda(x) &= -\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \\ \mu(x) &= -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{\ln|\cos(x)|}{2} \end{cases}$ conviennent.

Ainsi une solution particulière est $x \mapsto \left(-\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\cos(2x) + \left(-\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{\ln(\cos(x))}{2}\right)\sin(2x)$.

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\cos(2x) + \left(-\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{\ln(\cos(x))}{2}\right)\sin(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$