Correction des exercices du 18/03/2024 (Révision analyse)

<u>Ex 1</u> : (CCP 2021 épreuve 1)

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \; dt$.

2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi^2}{8}$.

On pourra utiliser librement que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction :

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f_k : t \in]0,1] \mapsto t^{2k} \ln t$. C'est une fonction continue sur $]0,1]$.

<u>Problème en 0 :</u> $|f_k(t)| = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $t^{2k+1/2}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann avec $\dfrac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonction positives, $\boxed{f_k \text{ est intégrable sur }]0,1].}$

Puis, par intégration par parties, avec $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et ln étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$,

$$\int_\varepsilon^1 t^{2k}\ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k+1}\int_\varepsilon^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln\varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2k+1}\right).$$

Donc, en faisant tendre ε vers 0 et par croissances comparées, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2k+1)^2}.}$

2. f est continue et positive sur $]0,1[$.

<u>Problème en 0 :</u> $f(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\sqrt{t}f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $]0,\dfrac{1}{2}]$.

<u>Problème en 1 :</u> $f(t) = \dfrac{\ln(1+(t-1))}{(t+1)(t-1)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{t-1}{2(t-1)} = \dfrac{1}{2}$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\dfrac{1}{2},1[$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$

Puis, pour $t \in]0,1[$, $t^2 \in]-1,1[$ donc $\dfrac{1}{1-t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, d'où :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t, \text{ avec } f_k : t \mapsto -t^{2k}\ln(t).$$

Justifions l'intégration terme à terme pour les fonctions positives (les f_k sont positives sur $]0,1[$).

Soit on constate que

H1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question **Q1** car positive et d'intégrale convergente.

H2. La série de fonction $\sum f_k$ converge simplement vers f qui est continue sur $]0,1[$.

Dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a alors : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

Or, si $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } f \text{ est intégrable sur }]0,1[}$, car elle est positive et son intégrale converge.