Correction des exercices du 25/03/2024 (Révision proba)

<u>Ex 1</u> : (E3A PSI 2019 épreuve 1)
Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } X_1(\omega) = 0 \text{ ou si } X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} \text{ si } X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Correction :

1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ donc

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, P(X_1 = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

On a :

$$[X_2 = 0] = [X_1 = 0] \sqcup \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} [X_1 = 2n+1].$$

Puisque l'union est disjointe :

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = 2n+1) = e^{-\lambda} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On reconnaît le développement en série entière du sinus hyperbolique :

$$P(X_2 = 0) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}\,(\lambda) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + 2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{2}.$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[X_2 = n] = \left[X_2 = \frac{2n}{2}\right] = [X_1 = 2n], \quad \text{donc} \quad P(X_2 = n) = P(X_1 = 2n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}.$$

On en déduit que la loi de la variable aléatoire X_2 est :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(X_2 = 0) = \frac{1 + 2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_2 = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}.}$$

2.

$$E(X_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(2n)\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!}.$$

L'espérance de X_2 existe car on reconnaît la série définissant le sinus hyperbolique :

$$E(X_2) = \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n+2}}{(2n+1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\,\mathrm{sh}\,(\lambda).$$

On a ainsi

$$\boxed{E(X_2) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2}\,\mathrm{sh}\,(\lambda) = \frac{\lambda}{4}(1 - e^{-2\lambda}).}$$