4-Compléments d'algèbre linéaire

Ex 1 : Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, avec :

1. $f_n : x \mapsto \cos^n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$;
2. $f_n : x \mapsto |x-n|$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 2 : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u_1, ..., u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1, ..., u_p)$ est de dimension k. On voit les u_i comme vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Que peut-on dire de la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(u_1, ..., u_p)$?

Ex 3 : Soient E un de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E de même dimension. On note F' (respectivement G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (respectivement G).

1. Montrer que : $F + G = F \cap G + = \oplus F' \oplus G'$.
2. Montrer que si $(f_1, ..., f_p)$ est une base de F' et $(g_1, ..., g_p)$ est une base de G', alors $F + G = F + K$, avec $K = \text{Vect}(f_1 + g_1, ..., f_p + g_p)$.
3. Montrer que $F \cap K = \{0\}$ et que $(f_1 + g_1, ..., f_p + g_p)$ est libre.
4. Montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E ont un supplémentaire commun si et seulement s'ils ont la même dimension.

Ex 4 : Soient $a_0, a_1, ..., a_n$, $(n+1)$ points distincts appartenant à l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(c_0, ..., c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} c_k P(a_k)$.

Ex 5 : Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que P est dans $\mathbb{Q}[X]$ (on pourra penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange).

Ex 6 : Soient $E_1, \ldots, E_n$ et $F_1, \ldots, F_n$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $E_i \subset F_i$ et : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Montrer que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ E_i = F_i$.

Ex 7 : Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$ et on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,
$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(X) = P(-X)\}$ et
$K = \{P \in \mathbb{R}_5[X],\ P(3) = P'(3) = P''(3) = P'''(3) = 0\}$. Montrer que tous ces ensembles sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_5[X]$, puis montrer que : $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$, puis $F \oplus G \oplus H \oplus K = \mathbb{R}_5[X]$.

Ex 8 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \text{Vect}\{(1,1,0), (2,0,-1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,-1,0), (1,0,-2)\}$.

1. Justifier sans calculs que $F \cap G \neq \{0\}$, puis expliciter $F \cap G$.
2. Trouver un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.

Ex 9 : (*) Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{U}_5$?

Ex 10 : Calculer la dimension et donner une base de $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\int_{-1}^{1} P = 0\}$.

Ex 11 : Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose $\Delta(u)=(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. Pour tout p de $\mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{Ker}\,(\Delta^p)$.

3. Pour tout p de $\mathbb{N}$ et u dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, expliciter $\Delta^p(u)$.

Ex 12 : Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on note $P_i=(X-a)^i$.

1. Montrer que $(P_0,...,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $f:P\mapsto(X-a)(P'(X)-P'(a))-2(P(X)-P(a))$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver son noyau et son image.

Ex 13 : Soient E,F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$ et on pose $w=v\circ u$. Montrer que les proposition suivantes sont équivalentes :

1. w est un isomorphisme de E dans G.
2. u est injective, v est surjective et $F=\mathrm{Ker}\,v\oplus\mathrm{Im}\,u$.

Ex 14 : Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soient $a,b\in\mathcal{L}(V)$ tels que les seuls sous-espace vectoriels stables à la fois par a et par b soient $\{0\}$ et V. On considère $u\in\mathcal{L}(E)$ non nul qui commute avec a et b. Montrer que u est bijectif.

Ex 15 : (*) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMB=0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en calculer la dimension.

Ex 16 : Montrer l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes $(B_n)_{n\geq0}$ telle que, pour tout n, $X^n=B_n(X)-B_n(X-1)$ et $B_n(0)=0$. Vérifier que $B_n'(X)=B_n'(0)+nB_{n-1}(X)$.

Ex 17 : (*) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$, $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $u^3=0$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}\,(u)+\mathrm{rg}\,(u^2)\leq n$.

2. Montrer que $2\mathrm{rg}\,(u^2)\leq\mathrm{rg}\,(u)$.

Ex 18 : (*) Soient E,F et G trois espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $u,v\in\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(u)\subset\mathrm{Ker}\,(v)\Leftrightarrow\exists f\in\mathcal{L}(F),\ v=f\circ u$.

2. Soient $u\in\mathcal{L}(F,G)$ et $v\in\mathcal{L}(E,G)$. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(v)\subset\mathrm{Im}\,(u)\Leftrightarrow\exists w\in\mathcal{L}(E,F),\ v=u\circ w$.

Ex 19 : **(CCP 62)** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que : $f^2-f-2Id=0$.

1. Montrer rapidement que : $\mathrm{Ker}\,(f+Id)\oplus\mathrm{Ker}\,(f-2Id)=E$.

2. On suppose E de dimension finie. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f+Id)=\mathrm{Ker}\,(f-2Id)$.

Ex 20 : Soient E et F deux espaces vectoriels, $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,E)$ tels que $u\circ v=\mathrm{Id}_F$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}\,u\oplus\mathrm{Im}\,v=E$.

b. Montrer que $v\circ u$ est la projection sur $\mathrm{Im}\,v$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,u$.

Ex 21 : (*) Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^2 = -Id_E$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est paire.

2. Montrer que si $a \neq 0$, $\big(a, f(a)\big)$ est libre ; on pose $F(a) = vect\big(a, f(a)\big)$.

3. Montrer qu'il existe $(a_1, \ldots, a_p) \in E^p$ tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F(a_i)$.

Ex 22 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe a, b dans $\mathbb{K}$ distincts tels que : $(f - aid_E) \circ (f - bid_E) = 0$.

1. Soient $p = \frac{1}{b-a}(f - aid_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(f - bid_E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

2. Expliciter $p + q$, $p \circ q$, $q \circ p$ et $bp + aq$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer f^n en fonction de p et q.

Ex 23 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux symétries de E telles que $\operatorname{Ker}(f - id_E) = \operatorname{Ker}(g - id_E)$. On pose $h = g \circ f - id_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f + id_E) = \operatorname{Ker}(g - id_E)$.

2. Montrer que h peut s'exprimer comme combinaison linéaire de f et g.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir : $g \circ f = f \circ g$.

Ex 24 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(id_E - f) = n$.

Ex 25 : (*) Soit E un espace de dimension finie.
Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On appelle *réflexion de* a toute application $s \in GL(E)$ telle que $s(a) = -a$ et pour laquelle il existe un hyperplan H de E tel que : $\forall x \in H,\ s(x) = x$.
Soit R une partie génératrice finie de E.
Montrer qu'il existe au plus une réflexion de a telle que $s(R) = R$.

Ex 26 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et p un projecteur de E. On pose $\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u \circ p = p \circ u\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que : $u \in \mathcal{F} \Leftrightarrow [u(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Im} p \ \text{ et } \ u(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Ker} p]$. En déduire $\dim(\mathcal{F})$.

Ex 27 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $p, q, r \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer que : $q = r = 0$.

Ex 28 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et V et W deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $V \oplus W = E$. Soit p la projection sur V parallèlement à W.

1. Donner les caractéristiques remarquables de l'endomorphisme $q = id_E - p$.

2. Soit $f = ap + bq$, avec a et b dans $\mathbb{K}$ distincts. Montrer qu'un sous-espace vectoriel A de E est stable par f si et seulement si on a : $A = A \cap V + A \cap W$.

3. Soit s la symétrie par rapport à V parallèlement à W. Déterminer les sous-espaces stables de s.

Ex 29 : Soit $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,1,-1)$ et $u_3 = (-1,1,1)$. On pose $F = vect(u_1,u_2)$ et $G = vect(u_3)$. Quelle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p sur F parallèlement à G ?

Ex 30 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = g(x)v$.

Ex 31 : Montrer que toute forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$ est de la forme $P \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P^{(i)}(0)$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Ex 32 : Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et on considère l'endomorphisme de E : $\phi : P \mapsto P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(1 - \dfrac{X}{2}\right) - 2P(X)$.

1. Déterminer, pour P dans E, le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P. Déterminer $\operatorname{Ker} \phi$.
2. On pose $Q_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \phi(X^n)$. Montrer $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E. Montrer que $\operatorname{Im} \phi$ est un hyperplan de E.
3. On considère la forme linéaire de E : $\theta : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P$. Montrer que $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Ker} \theta$.

Ex 33 : Soient $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n$ des réels et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On suppose que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Montrer que l'on peut trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)dt = 0$.

Ex 34 :

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto Tr(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. Calculer $Tr(J_r C)$, avec $J_r = diag(\underbrace{1, ..., 1}_{r \text{ fois}}, 0, ..., 0)$.
3. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Ex 35 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$. A est -elle inversible et si oui déterminer son inverse.

Ex 36 : On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = (\omega^{(p-1)(q-1)})_{1 \leqslant p,q \leqslant n}$.

1. Calculer $A\overline{A}$.
2. En déduire que A est inversible et A^{-1}.
3. Calculer $\det(A)$.

Ex 37 : Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que $I_n \in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

1. On note p la projection sur $vect(I_n)$ parallèlement à H. Prouver que l'on a :
$\forall (M,N) \in E_n^2$, $p(MN) = p(M)p(N)$.
2. Démontrer l'implication suivante : $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$.
3. Prouver alors que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.
4. Conclure.

Ex 38 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 39 : (*) Déterminer les formes linéaires ϕ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \phi(AB) = \phi(BA)$.

Ex 40 : Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$ et $A \neq \pm I_n$.
Montrer que $\operatorname{Tr} A \equiv n \quad [2]$ et que $\operatorname{Tr} A \leqslant n-2$.

Ex 41 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Montrer que l'endomorphisme $\phi : M \mapsto AM + MA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une trace égale à $2n\mathrm{rg}\,(A)$.

Ex 42 : Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} p_i X^i$ un polynôme fixé de degré k ($p_k \neq 0$).

1. Montrer que le système $\left\{P, \dfrac{d(P)}{1!}, \dfrac{d^2(P)}{2!}, ..., \dfrac{d^k(P)}{k!}\right\}$. constitue une base $\mathcal{B}_1$ de E. Donner la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$.
2. Pour $a \in \mathbb{C}^*$, exprimer les coordonnées du système $S = \{P(X), P(X+a), P(X+2a), ..., P(X+ka)\}$ dans la base $\mathcal{B}_1$. On note U la matrice ainsi obtenue. En déduire que S constitue une base de E que l'on notera $\mathcal{B}_2$.
3. Soit Q la matrice de passage de $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ vers $\mathcal{B}_2$. Exprimer Q en fonction de R et U.

Ex 43 : Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 2$. Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

1. $X + \mathrm{tr}(X)A = B$;
2. $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, lorsque $tr(A)$ est non nulle ;
3. $X + tr(X)X^T = \dfrac{2}{n} I_n$.

Ex 44 : Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
5. A et A^T, avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex 45 : Soit M une matrice qui n'est pas une homothétie, Montrez que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ex 46 : (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension $3n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{rg}\,(f) = 2n$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.
2. Quelle est la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(E),\ fg = gf\}$?

Ex 47 : Soient $n \geq 3$ et $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $a_{i,1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $a_{n,i} = 1$ pour $2 \leq i \leq n$, les autres coefficients étant nuls.

1. Montrer que l'image et le noyau de A sont supplémentaires.
2. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec B à préciser.
3. Déterminer les $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $X^2 = A$.

Ex 48 : (*) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)f(B)$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

Ex 49 : (*) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $1 < p < n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in GL_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto Y$ est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\, M$ dans $\mathrm{Ker}\,(D - CA^{-1}B)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}\,(M) = p$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

   Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $p = \max\{\mathrm{rg}\,(M),\ M \in V\}$. Le but des questions suivantes est de montrer que V est de dimension inférieure ou égale à np.
3. Pourquoi peut-on supposer sans perdre de généralité que $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à V ? On fait cette hypothèse dans la suite.
4. Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix},\ A \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \right\}$. Montrer que $V \cap W = \{0\}$.
5. Conclure.

Ex 50 : Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients non nuls.

1. Quel est le rang de A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On revient au cas général. On pose $B = 2A - \mathrm{tr}\,(A) I_n$. Calculer B^2, puis en déduire que B est inversible et déterminer B^{-1}.

Ex 51 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que : $\exists (B,C) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \times \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}),\ A = BC$.

Ex 52 : On veut résoudre l'équation $X^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec X dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit ϕ (respectivement a) l'endomorphisme canoniquement associé à X (respectivement à A).

1. Montrer que : $\phi \circ a = a \circ \phi$ et $\phi \circ (a - id_{R^3}) = (a - id_{R^3}) \circ \phi$.

2. En déduire que X est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \alpha & \lambda_2 & 0 \\ \beta & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \alpha, \beta$ dans $\mathbb{R}$, puis conclure.

Ex 53 : Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f) = E$.

Ex 54 : Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$ et $f^8 + 16f^4 = 0$. Déterminer le polynôme minimal de f, puis en déduire f.

Ex 55 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient F, G deux sous-espaces de E supplémentaires stables par u. On note π_u le polynôme minimal de u, π_F le polynôme minimal de $u_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $u_{|G}$. Démontrer que $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_F, \pi_G)$.

Ex 56 : $X^2 + 1$ est-il le polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Même question pour $X^2 + X + 1$ et $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Ex 57 : Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire le polynôme minimal de A.

2. Montrer que A est inversible.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 58 : (*) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout x de E, on pose $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}$.

1. Montrer que pour tout x de E, I_x est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. On note μ_x le polynôme unitaire tel que $\mu_x \mathbb{K}[X] = I_x$.

2. Montrer que $\mu_x | \mu_u$.

3. On suppose que $\mu_u = P^r$, avec P irréductible sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$.

4. Montrer que si μ_x et μ_y sont premiers entre eux, alors $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$.

5. On suppose que la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ de μ_u est $\mu_u = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on pose $E_i = \mathrm{Ker}\,(P_i^{\alpha_i}(u))$. Soit u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i. Montrer que le polynôme minimal de u_i est $P_i^{\alpha_i}$.

6. En déduire l'existence d'un élément x de E tel que $\pi_u = \mu_x$.

Ex 59 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soient φ une forme linéaire non nulle sur E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est stable par f si et seulement si : $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi \circ f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que : $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que : $LA = \lambda L$, avec $L = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
4. Montrer qu'il existe un plan stable par f si et seulement s'il existe une matrice colonne C non nulle et un scalaire λ tel que : $A^T C = \lambda C$.

Ex 60 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $f^2 \neq 0$, $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $f^2(e) \neq 0$, puis que $(e, f(e), f^2(e))$ est un base de E.
2. Soit $F = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$, le commutant de f. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\{\mathrm{Id}, f, f^2\}$.

Ex 61 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(AB)^n = 0$. Montrer que $(BA)^n = 0$.

Ex 62 : Soit $A = diag(1, 2, ..., n)$ on pose $g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(g)$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $tr(M) = 0$. Montrer que : $\exists B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = BC - CB$.
4. Si U est nilpotente, montrer que $h : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto UM - MU$ est nilpotente.

Ex 63 : Soient f, g, h trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose $f \circ g - g \circ f = h$ et $\mathrm{rg}\,(h) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de E telle que $\mathrm{Ker}\,(h) = \mathrm{Vect}\big((e_i)_{i \in [\![1,n-1]\!]}\big)$.
2. Quelle est la trace de h ?
3. Montrer que h est nilpotente.

Ex 64 : (*) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $tr(f(I_2)) = 0$ et $f(N) = 0$ pour toute matrice N nilpotente. Montrer que $f^2 = 0$.

Ex 65 : (*) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = I_n + N$.

Ex 66 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible et B la matrice obtenue en échangeant les colonnes i et j. Montrer que B est aussi inversible. Comment passe-t-on de A^{-1} à B^{-1} ?

Ex 67 : Inverser si possible les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & (0) & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex 68 : (*) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = [(i + j + \alpha)^2]_{1 \leq i,j \leq n}$. Déterminer le rang de M.

Ex 69 : Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1 - x, ..., e_n - x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Ex 70 : Déterminer le rang, la trace et le déterminant des endomorphismes suivants :

1. f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $f : M \mapsto aM + bM^T$, avec a, b dans $\mathbb{R}$;

2. h l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $h(P) = XP'' + (X-4)P' - 3P$;

3. k l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ k(P)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}P(t)dt$, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$;

Ex 71 : Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Calculer pour tout x de $\mathbb{K}$: $\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \cdots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \cdots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \cdots & P(x+2n) \end{vmatrix}$.

Ex 72 : *1.* Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \overline{\det(M)} = \det(\overline{M})$.

2. En déduire que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.

Ex 73 : Soit $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$, avec B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelles conditions A est-elle inversible ? Calculer son inverse lorsque celui-ci existe.

Ex 74 : (*) Soient $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec H de rang un. Montrer que : $\det(A-H)\det(A+H) \leq (\det(A))^2$.

Ex 75 : (*) Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\Phi : A \mapsto A^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 76 : (*) Soient A, B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \det(xA + B) = 0$.

Ex 77 : Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension p et $u \in \mathcal{L}(V)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit u_n l'endomorphisme de V^n défini par : $\forall (v_1, ..., v_n) \in V^n,\ u_n(v_1, ..., v_n) = (u(v_n), v_1, ..., v_{n-1})$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{C},\ \det(id_V - t^n u) = \det(id_{V^n} - tu_n)$.

Ex 78 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note P la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$. Déterminer la valeur de $\det(P)$.

Ex 79 : Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Soit J_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale ayant r coefficients égaux à 1, puis uniquement des coefficients nuls sur la diagonale.

1. Si $r > 0$ trouver $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\det(X + J_r) \neq \det(X)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A + X) = \det(X)$. Montrer que $A = 0$.

Ex 80 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$. Montrer que : $2^{n-1} \mid \det A$.

Ex 81 : Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ avec $a\neq b$ et $r_1,...,r_n$ des nombres complexes. On pose $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec $a_{ij}=r_i$ si $i=j$, $\ a_{ij}=b$ si $i>j$ et $a_{ij}=a$ si $i<j$. Pour $x\in\mathbb{C}$, on pose $D(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de A .

1. Calculer $D(-a)$ et $D(-b)$.
2. Montrer que $D(x)$ est un polynôme de degré au plus un et en déduire $D(x)$.
3. En déduire $\det(A)$.

Ex 82 : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & n & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & 1 & 0 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & (0) & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Ex 83 : Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversible. Montrer que M^{-1} est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det(M)|=1$.

Ex 84 : Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $Q_p(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$.

1. Calculer $Q_p(x+1)-Q_p(x)$ en utilisant la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (p+1)x^p \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $Q_p(n+1)=(p+1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$.

Ex 85 : Soit $n\ge 2$ et $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles.

1. Montrer que $com(comA)=(\det A)^{n-2}A$.
2. Montrer que : $com(AB)=com(B)com(A)$

Ex 86 : Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie $n\ge 2$ et $a\in\mathcal{A}$.

1. Montrer que $x\mapsto ax$ est linéaire.
2. Montrer que a est inversible si et seulement si $a\neq 0$. Qu'en déduire ?
3. Montrer qu'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(a)=0$.
4. Que dire de $I=\{P\in\mathbb{R}[X],\ P(a)=0\}$?
5. Soient $U,V\in\mathbb{R}[X]$ tels que : $UV\in I$. Montrer que U ou V est dans I.
6. (*) On suppose $\mathcal{A}$ commutative.
   a. Soit $a\in\mathcal{A}\setminus\mathbb{R}.1$. Montrer que $(1,a)$ est libre et $(1,a,a^2)$ est liée.
   b. Montrer l'existence de $i\in\mathcal{A}$ tel que $i^2=-1$, puis que $\mathcal{A}$ est isomorphe (en tant qu'algèbre) à $\mathbb{C}$.